Suites et séries [*]

Jean-Marie Dufour [†]
Université de Montréal

Première version: Mars 1992
Révisions: Janvier 2002
Cette version: 10 février 2003
Compilé: 10 février 2003, 10:59am

[*]Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS) et du Fonds FCAR du Québec.

[†] L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

SYMBOLES

ssi : si et seulement si

∞ : l'infini

A^c : complément de l'ensemble A

$\Rightarrow$: implique

$\Leftrightarrow$: si et seulement si

$\sim$: est distribué comme

$\equiv$: égal par définition

1. Définitions et notations

1.1 NOTATION. $\mathbb{C}$ désigne les nombres complexes, $\mathbb{R}$ les nombres réels, $\mathbb{Z}$ les entiers, $\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$ les entiers non négatifs et $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ les entiers positifs. $\overline{\mathbb{R}}$ désigne les nombres réels étendus :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \ .$$

1.2 DÉFINITION : Ensemble borné dans $\mathbb{R}$. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. S'il existe un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y, \forall x \in \mathbb{R}$, on dit que E est *borné supérieurement*. S'il existe un élément $z \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq z$, $\forall x \in E$, on dit que E est *borné inférieurement*. Si E est borné inférieurement et supérieurement, on dit que E est *borné*.

1.3 DÉFINITION : Supremum et infimum. Soit $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. $\sup(E)$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \leq \sup(E), \forall x \in E$; $\inf(E)$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\inf(E) \leq x$, $\forall x \in E$.

1.4 DÉFINITION : Ensemble borné dans $\mathbb{C}$. Soit $E \subseteq \mathbb{C}$. S'il existe un nombre réel M et un nombre complexe z_0 tels que $|z - z_0| < M$ pour tout $z \in E$, on dit que l'ensemble E est *borné*.

1.5 DÉFINITION : Suite. Soit E un ensemble. Une suite dans E est une fonction $f(n) = a_n$ qui associe à chaque élément $n \in \mathbb{N}$ un élément $a_n \in E$. On dénote habituellement la suite par l'ensemble ordonné des valeurs prises par $f(n)$:

$$\{a_1, a_2, ...\} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{a_n\}$$

ou encore

$$(a_1, a_2, ...) \equiv (a_n)_{n=1}^{\infty} \equiv (a_n) \ .$$

Si $E = \mathbb{C}$, la suite est dite *complexe*. Si $E = \mathbb{R}$, la suite est dite *réelle*. Pour indiquer que tous les éléments de la suite $\{a_n\}$ sont dans E, nous écrivons $\{a_n\} \subseteq E$.

REMARQUE. Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $I_m = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$. Toute fonction $f(n) = b_n$ qui associe à chaque élément $n \in I_m$ un élément $a_n \in E$ peut être considérée comme une suite dans E en définissant : $a_n = b_{m+n-1}$, $n = 1, 2, ...$. On dénote habituellement une telle suite par l'un des symboles suivants :

$$\{b_m, b_{m+1}, ...\} \equiv \{b_n\}_{n=m}^{\infty} \ .$$

De même, si $I_m = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq m\}$, il suffit de définir $a_n = b_{m-n+1}$, $n = 1, 2, ...$. Dans ce cas, la suite peut être décrite par l'un des symboles suivants :

$$\{..., b_{m-1}, b_m\} \equiv \{b_n\}_{n=-\infty}^{m} \ .$$

1.6 DÉFINITION : Sous-suite. Soient E un ensemble, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ et $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite d'entiers positifs tels que $n_1 < n_2 < ...$. La suite $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ est une *sous-suite* de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1.7 DÉFINITION : Limite d'une suite complexe. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. La suite $\{a_n\}$ *converge* vers a ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N$ implique $|a_n - a| < \varepsilon$. Dans ce cas, on écrit $a_n \to a$, ou

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ ,$$

et a est appelé la *limite* de $\{a_n\}$. Lorsqu'il existe un nombre $a \in \mathbb{C}$ tel que $a_n \to a$, on dit que la suite $\{a_n\}$ *converge* (ou converge dans $\mathbb{C}$). Si la suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

REMARQUE. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut aussi écrire $\lim\ a_n$ au lieu de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

1.8 DÉFINITION : Convergence dans un sous-ensemble. Soient $E \subseteq \mathbb{C}$ et $\{a_n\} \subseteq E$. S'il existe un élément $a \in E$ tel que $a_n \to a$, on dit que $\{a_n\}$ converge dans E.

1.9 DÉFINITION : Convergence au sens de Cauchy. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. La suite $\{a_n\}$ *converge au sens de Cauchy* ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $m \geq N$ et $n \geq N$ impliquent $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Une suite qui converge au sens de Cauchy est appelée *suite de Cauchy*.

1.10 DÉFINITION : Limites infinies. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. On dit que la suite $\{a_n\}$ diverge vers ∞ ssi pour tout réel M il existe un entier N tel que $n \geq N$ implique $a_n \geq M$. Dans ce cas, on écrit $a_n \to \infty$ ou

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ .$$

De même, on dit que la suite $\{a_n\}$ diverge vers $-\infty$ ssi pour tout réel M il existe un entier N tel que $n \geq N$ implique $a_n \leq M$. Dans ce cas, on écrit $a_n \to -\infty$ ou

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ .$$

On écrit aussi $+\infty$ à la place de ∞.

1.11 DÉFINITION : Suite monotone. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Si $a_n \leq a_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que la suite $\{a_n\}$ est *monotone croissante*. Si $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que la suite $\{a_n\}$ est *monotone décroissante*. Si $\{a_n\}$ est monotone croissante et $a_n \to a$, on écrit $a_n \uparrow$ a. Si $\{a_n\}$ est monotone décroissante et $a_n \to a$, on écrit $a_n \downarrow a$.

1.12 DÉFINITION : Limites supérieure et inférieure. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. La *limite supérieure* de la suite $\{a_n\}$ est définie par

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{N\geq 1}\left\{\sup_{n\geq N} a_n\right\} \equiv \inf\left\{\sup\left\{a_n : n \geq N\right\} : N \geq 1\right\} .$$

La *limite inférieure* de la suite $\{a_n\}$ est définie par

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{N\geq 1}\left\{\inf_{n\geq N} a_n\right\} \equiv \sup\left\{\inf\left\{a_n : n \geq N\right\} : N \geq 1\right\} .$$

On écrit aussi $\overline{\lim}$ au lieu de $\limsup$, et $\underline{\lim}$ au lieu de $\liminf$.

REMARQUE. Les limites supérieure et inférieure d'une suite $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.13 DÉFINITION : Point d'accumulation. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. a est un *point d'accumulation* de la suite $\{a_n\}$ ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|a_n - a| < \varepsilon$ est satisfaite par une infinité d'éléments de la suite $\{a_n\}$.

1.14 DÉFINITION : Somme partielle et série. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. On appelle $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ la suite des *sommes partielles* associées à $\{a_n\}$. Le symbole $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est appelé la *série* associée à $\{a_n\}$. Si $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ où $S \in \mathbb{C}$, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* (ou converge vers S) et on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .$$

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

REMARQUE. Si on considère une suite de la forme $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$, où $m \in \mathbb{Z}$, on dit que la série $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ converge vers S si $\lim_{N\to\infty} S_N = S$, où $S_N = \sum_{n=m}^{N+(m-1)} a_n$. De même, pour une suite de la forme $\{a_n\}_{n=-\infty}^{m}$, où $m \in \mathbb{Z}$, on dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{m} a_n$ converge vers S si $\lim_{N\to\infty} S_N = S$, où $S_N = \sum_{n=m}^{m+1-N} a_n$.

1.15 DÉFINITION : Convergence absolue et convergence conditionnelle d'une série. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument*. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne converge pas, on dit que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge conditionnellement*.

1.16 DÉFINITION : Série bilatérale. Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{a_n\}_{n=-\infty}^{-1}$ deux suites de nombres complexes. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers $S_1 \in \mathbb{C}$ et si la série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ converge vers $S_2 \in \mathbb{C}$, on dit que la série bilatérale $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ converge vers $S_1 + S_2$.

1.17 DÉFINITION : Double suite. Une double suite dans E est une fonction $f\,(m,\ n) = a_{mn}$ qui associe à chaque paire d'éléments $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ un élément $a_{mn} \in E$. On dénote habituellement la double suite par

$$\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty} \equiv \{a_{mn}\}\ .$$

Pour indiquer que tous les éléments de la double suite $\{a_{mn}\}$ sont dans E, nous écrirons $\{a_{mn}\} \subseteq E$.

1.18 DÉFINITION : Limite d'une double suite complexe. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\{a_{mn}\} \subseteq \mathbb{C}$. La double suite $\{a_{mn}\}$ converge vers a lorsque $m,\ n \to \infty$ ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $m,\ n \geq N$ implique $|a_{mn} - a| < \varepsilon$. Dans ce cas, on écrit $a_{mn} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} a$, ou encore

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = a\ ,$$

et a est appelé la *limite* de $\{a_{mn}\}$ lorsque $m,\ n \to \infty$.

REMARQUE. Dans le cas d'une double suite, on peut considérer plusieurs limites différentes : $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$, $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$, $\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} a_{mn}\right]$, $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} a_{mn}\right]$. En général, *ces différentes limites ne sont pas égales*. En particulier, même si les limites

$$\lim_{m\to\infty} a_{mn} \equiv b_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_{mn} = c_m$$

existent, on peut avoir

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} a_{mn}\right] \equiv \lim_{n\to\infty} b_n \neq \lim_{m\to\infty} c_m \equiv \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} a_{mn}\right]\ .$$

2. Convergence de suites

2.1 THÉORÈME : Critère de convergence d'une suite complexe. Soit $\{c_n\} \subseteq \mathbb{C}$, où $c_n = a_n + i\, b_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, pour tout n, et $i = \sqrt{-1}$. Alors la suite $\{c_n\}$ converge ssi les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent. De plus, si $\{c_n\}$ converge,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + i\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)\ .$$

2.2 THÉORÈME : Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ et $a' \in \mathbb{C}$.

a. Unicité de la limite. Si $a_n \to a$ et $a_n \to a'$, alors $a = a'$.

b. Caractère borné des suites convergentes. Si la suite $\{a_n\}$ converge, alors l'ensemble $\{a_1, a_2, ...\}$ est borné.

c. Convergence d'une suite bornée (Bolzano-Weierstrass). Si la suite $\{a_n\}$ est bornée, alors $\{a_n\}$ contient une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ convergente. En d'autres termes, toute suite bornée $\{a_n\}$ possède au moins un point d'accumulation.

d. Convergence de sous-suites. $\{a_n\}$ converge vers $a \Leftrightarrow$ chaque sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ converge vers $a \Leftrightarrow$ chaque sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ contient une autre sous-suite $\{a_{m_k}\}$ qui converge vers a.

e. Points d'accumulation et convergence. Si la suite $\{a_n\}$ possède exactement un point d'accumulation a, alors $a_n \to a$. Si la suite $\{a_n\}$ n'a pas de point d'accumulation fini ou en possède plusieurs, alors elle diverge.

2.3 THÉORÈME : Convergence de suites transformées. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{b_n\} \subseteq \mathbb{C}$ deux suites telles que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

où a, $b \in \mathbb{C}$. Alors

a. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

b. $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, a$, $\lim_{n\to\infty} (a_n + c) = a + c$, $\forall c \in \mathbb{C}$;

c. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a\, b$;

d. $\lim (a_n/b_n) = a/b$, pourvu que $b \neq 0$;

e. $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$ pour toute fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue à $x = a$.

2.4 THÉORÈME : Convergence et suites de Cauchy. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$.

a. Si la suite $\{a_n\}$ converge, alors $\{a_n\}$ converge au sens de Cauchy.

b. (Complétude). Si la suite $\{a_n\}$ converge au sens de Cauchy, alors la suite $\{a_n\}$ converge.

2.5 THÉORÈME : Convergence de suites dans $\mathbb{R}$. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a. $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

b. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$.

c. Si $a_n \leq b_n$ pour $n \geq N$, alors

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &\leq \liminf_{n\to\infty} b_n \,, \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &\leq \limsup_{n\to\infty} b_n \,. \end{aligned}$$

d. Si $a_n \leq b_n$ pour $n \geq N$ et si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes, alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \,.$$

e. Si la suite $\{a_n\}$ est monotone croissante, alors

$$\{a_n\} \text{ converge dans } \mathbb{R} \text{ ou } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \,.$$

f. Si la suite $\{a_n\}$ est monotone décroissante, alors

$$\{a_n\} \text{ converge dans } \mathbb{R} \text{ ou } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \,.$$

g. Si la suite $\{a_n\}$ est monotone (croissante ou décroissante) et bornée, alors $\{a_n\}$ converge dans $\mathbb{R}$.

2.6 THÉORÈME : Limites de suites importantes. Soient p et α des nombres réels et x un nombre complexe.

a. Si $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

b. Si $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} p^{1/n} = 1$.

c. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

d. Si $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

e. Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

f. Si $b > 0$ et $b \neq 1$, $\lim_{n\to\infty} [\log_b(n)/n] = 0$.

3. Convergence de séries

3.1 THÉORÈME : Condition de Cauchy pour la convergence d'une série. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq m \geq N$ implique $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$.

3.2 PROPOSITION : Formes équivalentes de la condition de Cauchy. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$\Leftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N$ implique $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon$ pour tout $p \geq 1$

$\Leftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N$ implique $\sup\limits_{p\geq 1} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{p\geq 1} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\right|\right] = 0 \, .$$

3.3 THÉORÈME : Conditions nécessaires pour la convergence d'une série. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$.

a. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge et si $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ pour $n \geq N$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (na_n) = 0$.

3.4 COROLLAIRE : Critère de divergence d'une série. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $c > 0$. Si $|a_n| \geq c$ pour un nombre infini de valeurs de n, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3.5 THÉORÈME : Caractérisation de la convergence absolue. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne converge pas absolument $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

REMARQUE. Pour indiquer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, on peut écrire $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

3.6 THÉORÈME : Critère de la convergence absolue. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3.7 COROLLAIRE : Critère de divergence absolue. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

3.8 THÉORÈME : Critère de comparaison. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $\{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$ et $\{d_n\} \subseteq \mathbb{R}$.

a. Si $|a_n| \leq c_n$ pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné, et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

b. Si $|a_n| \geq d_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné, et si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverge, alors
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ peut converger ou diverger.

3.9 THÉORÈME : Convergence de séries de termes non négatifs. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ où $a_n \geq 0$ pour tout n.

a. La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi la suite des sommes partielles $\{\sum_{n=1}^{N} a_n\}_{N=1}^{\infty}$ est bornée.

b. Critère de condensation de Cauchy. Si la suite $\{a_n\}$ est monotone décroissante $(a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...)$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2\ a_2 + 4a_4 + 8\ a_8 + ... \text{ converge.} \tag{3.1}$$

3.10 PROPOSITION : Convergence de séries particulières. Soit x un nombre complexe et p un nombre réel.

a. Série géométrique. Si $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

où $0^0 \equiv 1$. Si $|x| \geq 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge.

b. La série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.

c. La série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.

d. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

3.11 THÉORÈME : Critère de la racine (Cauchy). Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

a. Si $\alpha < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

b. Si $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c. Si $|a_n|^{1/n} \leq \delta < 1$ pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

d. Si $|a_n|^{1/n} \geq 1$ pour un nombre infini de valeurs de n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

e. Si aucune des conditions précédentes n'est satisfaite, on peut trouver des cas où $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et des cas où $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3.12 THÉORÈME : Critère du ratio (d'Alembert). Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $0/0 \equiv 0$.

a. Si $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

b. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \varepsilon < 1$ pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

c. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

d. Si $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

e. Si $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ peut converger ou diverger.

REMARQUE. La condition 3.11c implique la condition 3.11b.

3.13 THÉORÈME : Lien entre les tests de la racine et du ratio. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ une suite telle que $a_n \neq 0$ pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

Si on définit $0/0 \equiv 0$ et $|x/0| = \infty$ pour $x \neq 0$, l'inégalité est valable pour toute suite $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$.

3.14 THÉORÈME : Critère de Raabe. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et

$$L = \liminf_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right), \; U = \limsup_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

où $L, U \in \overline{\mathbb{R}}$.

a. Si $L > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

b. Si $U < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ peut converger ou diverger.

c. Si $L = U = 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ peut converger ou diverger, et de même pour $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.15 THÉORÈME : Critère de Gauss. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $\{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$ et supposons que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^p}$$

où $p > 1$ et $|c_n| \leq M < \infty$, $\forall n$. Alors

a) si $L > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument ;

b) si $L \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ peut converger ou diverger.

3.16 THÉORÈME : Critère de l'intégrale. Soit $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, une fonction réelle continue, non négative et non décroissante pour $x \geq A$, et soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ une suite telle que $|a_n| = f(n)$ pour $n \geq A$. Alors

a) $\int_A^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument ;

b) $\int_A^{\infty} f(x)dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

3.17 THÉORÈME : Critère de Dirichlet pour la convergence d'une série de produits. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ deux suites telles que

a) $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq M$, pour tout $N = 1, 2, ...$, où $M \geq 0$,

b) $b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n$,

c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

3.18 COROLLAIRE : Critère des séries alternées (Leibniz). Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ une suite telle que

a) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, $\forall n$,

b) $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$, $\forall n$,

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1$.

3.19 THÉORÈME : Critère d'Abel pour la convergence d'une série de produits. Soient $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ deux suites telles que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ,

b) b_n est une suite monotone bornée .

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

REMARQUE. Contrairement à la plupart des critères décrits précédemment, les critères d'Abel et de Dirichlet ne sont pas des critères de convergence absolue.

3.20 THÉORÈME : Critère d'Abel-Dini pour la convergence d'une série de ratios. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge d'une façon telle que $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n > 0, \forall N$, et $S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, alors

a) la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n / S_n^{\delta}$ diverge pour tout $\delta \leq 1$,

b) la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n / S_n^{\delta}$ converge pour tout $\delta > 1$.

3.21 THÉORÈME : Critère de Landau pour la convergence d'une série de produits. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$, où $p > 1$, converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge pour toutes les suites $\{b_n\} \subseteq \mathbb{C}$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q$ converge, où $q = p/(p-1)$.

REMARQUE : Le théorème de Landau implique que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q < \infty$, où $p > 1$ et $q = p/(p-1)$, alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ convergent. De plus, il fournit une condition nécessaire pour la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ lorsque $p > 1$.

3.22 THÉORÈME. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (1 - \frac{n}{N}) a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

et

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n \, a_n = 0 \ .$$

3.23 THÉORÈME : Condition de convergence au sens de Cesaro. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ une suite telle que $a_n \to a \in \mathbb{C}$. Alors

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = a \ .$$

4. Convergence de séries transformées

4.1 THÉORÈME : Convergence de séries transformées linéairement. Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ deux suites telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B \ ,$$

où A, $B \in \mathbb{C}$. Alors les suites $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ convergent pour tout $c \in \mathbb{C}$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B, \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n = c \ .$$

4.2 DÉFINITION : Convolution de suites et produit de séries. Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$. On appelle la suite

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, n = 0, 1, 2, ...$$

la *convolution* des suites $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. De plus, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est appelée le *produit* des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

REMARQUE. On dénote parfois la convolution des suites a_n et b_n par $a_n * b_n$:

$$a_n * b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ .$$

4.3 THÉORÈME : Conditions suffisantes pour la convergence du produit de deux séries (Cauchy-Mertens). Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ deux suites telles que

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, où A, $B \in \mathbb{C}$,

et

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB \ . \qquad \text{(Mertens)}$$

Si, de plus,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge absolument.

la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolument. (Cauchy)

4.4 THÉORÈME : Limite du produit de deux séries (Abel). Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ et $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ sont trois suites telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergent vers A, B et C respectivement, et si

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ ,$$

alors

$$C = AB \ .$$

4.5 THÉORÈME : Condition nécessaire et suffisante pour la convergence du produit de deux séries. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$, converge pour toutes les suites $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

4.6 THÉORÈME : Regroupement des termes. Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{C}$, soit $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}_0$ une suite monotone croissante d'entiers non négatifs telle que $r_0 = 0$ et $r_n \to \infty$, et soit $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ la suite définie par

$$b_n = \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n - 1} a_k, n = 1, 2, \ldots \ .$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \ .$$

4.7 DÉFINITION : Réarrangement. Soit $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite d'entiers non négatifs telle que chaque entier non négatif apparaît une et une seule fois dans la suite. Si

$$a'_n = a_{k_n}, \ n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

on appelle la série $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ un réarrangement de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4.8 DÉFINITION : Série commutativement convergente. Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers $A \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est *commutativement convergente* si tous les réarrangements $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent vers A.

4.9 THÉORÈME : Réarrangement d'une série absolument convergente (Dirichlet). Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument vers $A \in \mathbb{C}$. Alors tous les réarrangements de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent vers A.

4.10 THÉORÈME : Réarrangement d'une série conditionnellement convergente (Riemann). Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ une série telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge conditionnellement et soit

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty \ .$$

Alors il existe un réarrangement $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ telle que

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a'_m \right) = \alpha \ , \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a'_m \right) = \beta \ .$$

4.11 THÉORÈME : Équivalence entre convergences absolue et commutative. Soit $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ une suite telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Alors, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument ssi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge commutativement.

4.12 THÉORÈME : Grand théorème de réarrangement de Cauchy. Soit $\{a_{mn} : m, n = 0,$ $1, 2, ...\} \subseteq \mathbb{C}$ une double suite telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| = b_m, m = 0, 1, 2, ...$$

et $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ converge. Alors

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

5. Convergence uniforme

5.1 NOTATION. Dans cette section, à moins d'avis contraire, f_n et f désignent des fonctions d'un ensemble E quelconque vers les nombres complexes $\mathbb{C}$, $i.e.$ $f_n : E \to \mathbb{C}$ et $f : E \to \mathbb{C}$.

5.2 DÉFINITION : Convergence uniforme. On dit que la suite de fonctions $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge uniformément sur* E *vers la fonction* f si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier

N tel que

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E \ .$$

Dans ce cas, on écrit $f_n \to f$ uniformément sur E.

REMARQUE. On dit que la série $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ converge uniformément sur E si la suite des sommes partielles $s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$, $n = 0,\ 1$, ... converge uniformément sur E.

5.3 THÉORÈME : Critère de Cauchy. La suite de fonctions $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément sur E vers une fonction f si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$m, n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in E \ .$$

5.4 THÉORÈME : Critère du suprémum. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in E \ ,$$

et soit

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \ .$$

Alors, $f_n \to f$ uniformément sur E si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

5.5 THÉORÈME : Critère de convergence uniforme de Weierstrass. Supposons que $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in E$, $n = 0, 1,\ 2,$ ... et $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur E.

5.6 THÉORÈME : Convergence uniforme et continuité. Si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de fonctions continues sur E et si $f_n \to f$ uniformément sur E, alors la fonction f est continue sur E.

5.7 REMARQUE. Une suite de fonctions continues $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ peut converger vers une fonction continue f sans que la convergence soit uniforme.

5.8 THÉORÈME : Conditions de convergence uniforme (Dini). Si

a) K est un ensemble compact,

b) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de fonctions continues sur K,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in K$, où f est une fonction continue sur K,

d) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in K$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ ....$, alors $f_n \to f$ uniformément sur K.

5.9 THÉORÈME : Convergence uniforme et différentiation de fonctions sur $\mathbb{R}$. Supposons que $[a,\ b] \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ et soit $f_n : E \to \mathbb{C}$, une suite de fonctions différentiables sur l'intervalle $[a, b]$ telles que la suite $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ converge pour au moins un $x_0 \in [a, b]$. Si la suite $\{f'_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f différentiable sur E, et

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \forall x \in [a, b] \ .$$

5.10 THÉORÈME : Convergence uniforme et différentiation de fonctions sur $\mathbb{C}$. Soit $E \subseteq \mathbb{C}$ et soit $f_n : E \to \mathbb{C}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$, une suite de fonctions différentiables dans E. Si la suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers une fonction f dans E et $\{f'_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément dans E, alors la fonction f est différentiable dans E et

$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} f'_n(z), \forall z \in E.$$

6. Preuves et références

1. Rudin (1976, chapitres 1 et 3).

1.12 Royden (1968, section 2.4, p. 35-38).

1.17 - 1.18 Iyanaga et Kawada (1977, article 374, p. 1162).

2. Rudin (1976, chapitre 3).

2.2 Ahlfors (1979, chapitre 1, p. 62), Gillert et al. (1986, chapitre 18.1, p. 422) et Rudin (1976, chapitre 3).

2.6 Rudin (1976, théorème 3.20, p. 57) et Gillert et al. (1986, chapitre 18.1, p. 420).

3. Rudin (1976, chapitre 3).

3.2 Gillert et al. (1986, section 18.2, p. 428).

3.3 Knopp (1956, section 2.6.2, théorème 1, p. 49, et section 3.3, théorème 1, p. 61).

3.14 Devinatz (1968, section 3.2.4, p. 112) et Taylor (1955, section 17.4, p. 567-568).

3.15 Taylor (1955, section 17.4, p. 568-569).

3.16 Taylor (1955, section 17.21, p. 551-553).

3.17 Anderson (1971, lemme 8.3.1, p. 460).

3.18 Piskounov (1980, chapitre XVI(7), p. 294-296).

3.20 Hardy, Littlewood et Polya (1952, théorème 162, p. 120) et Knopp (1956).

3.21 Beckenbach et Bellman (1965, chapitre 3, théorème 11, p. 116-117).

3.22 Fuller (1976, lemme 3.1.5, p. 112).

4. Rudin (1976, chapitre 3).

4.3 Rudin (1976, section 3.50, p. 74-75), Taylor (1955, section 17.6, p. 575-580) et Iyanaga et Kawada (1977, article 374, p. 1162).

4.5 Beckenbach et Bellman (1965, chapitre 3, théorème 12, p. 117).

4.6 Gillert et al. (1986, chapitre 18, p. 428).

4.8 Gillert et al. (1987, section 18.2, p. 429).

4.9 - 4.10 Iyanaga et Kawada (1977, article 374, p. 1162).

4.11 Gillert et al. (1987, section 18.2, p. 429).

5. Ahlfors (1979, chapitre 2) et Rudin (1976, chapitre 7).

5.2 Ahlfors (1979, section 2.3, p. 36) et Rudin (1976, définition 7.7, p. 147).

5.3 Ahlfors (1979, section 2.3, p. 36) et Rudin (1976, théorème 7.8, p. 147).

5.4 Rudin (1976, théorème 7.9, p. 148).

5.5 Rudin (1976, théorème 7.10, p. 148).

5.6 Ahlfors (1979, section 2.3, p. 36) et Rudin (1976, théorème 7.12, p. 150).

5.7 Rudin (1976, sections 7.12 et 7.6, p. 150 et 146).

5.8 Rudin (1976, théorème 7.13, p. 150).

5.9 Rudin (1976, théorème 7.17, p. 152).

Références

AHLFORS, L. V. (1979) : *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, third edn.

ANDERSON, T. W. (1971) : *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons, New York.

BECKENBACH, E. F., AND R. BELLMAN (1965) : *Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin and New York, second edn.

DEVINATZ, A. (1968) : *Advanced Calculus*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

FULLER, W. A. (1976) : *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons, New York.

GILLERT, W., KÜSTNER, H. KELLWICH, AND H. KÄSTNER (1986) : *Petite encyclopédie des mathématiques*. Éditions K. Pagoulatos, Paris and Athens.

GRADSHTEYN, I. S., AND I. M. RYZHIK (1980) : *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York.

HARDY, G., J. E. LITTLEWOOD, AND G. POLYA (1952) : *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., second edn.

IYANAGA, S., AND Y. KAWADA (eds.) (1977) : *Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Volumes I and II*. 1977, Cambridge, Massachusetts.

KNOPP, K. (1956) : *Infinite Sequences and Series*. Dover Publications, New York.

PISKOUNOV, N. (1980) : *Calcul différentiel et intégral*. Éditions de Moscou, Moscow.

ROYDEN, H. L. (1968) : *Real Analysis*. MacMillan, New York.

RUDIN, W. (1976) : *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*. McGraw-Hill, New York.

——— (1987) : *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, third edn.

SPIEGEL, M. R. (1964) : *Theory and Problems of Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and its Applications*. Schaum Publishing Company, New York.

TAYLOR, A. E. (1955) : *Advanced Calculus*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.