Causalité dans les modèles de séries chronologiques multivariés *

Jean-Marie Dufour †
Université de Montréal

Première version: Mars 1982
Révisions: Février 2000
Cette version: 11 avril 2003
Compilé: 11 avril 2003, 10:26pm

*Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS) et du Fonds FCAR du Québec.

† L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

Liste de définitions, propositions et théorèmes

1. Notions de causalité

1.1 Notation *Soit* $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ *un espace de probabilité,* $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ *et* $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ *des variables aléatoires (réelles) ayant des variances finies* [*sur* $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$]
$\mathbb{Z}$ = *Ensemble des entiers*
A_t = *Ensemble dénombrable (fini ou infini) de variables aléatoires ayant des variances finies et comprenant* X_t *et* Y_t *(ensemble d'information)*

$$A_t = \{Z_{kt} : k \in I\}\ , \quad I \subseteq \mathbb{Z}\,, \quad \{X_t, Y_t\} \subseteq A_t\,, \tag{1.1}$$

$$\bar{X}_t = \{X_s : s \leq t\}\,, \quad \bar{Y}_t = \{Y_s : s \leq t\}\ , \tag{1.2}$$

$$\bar{A}_t = \underset{s \leq t}{\cup} A_s\,, \tag{1.3}$$

$$X = \{X_t : t \in \mathbb{Z}\} = \{X_t\}\,, \quad Y = \{Y_t : t \in \mathbb{Z}\} = \{Y_t\}\ , \tag{1.4}$$

$$A = \underset{t \in \mathbb{Z}}{\cup} A_t\,, \tag{1.5}$$

$$B = \text{sous-ensemble quelconque de } A : B \subseteq A\,, \tag{1.6}$$

$P(Y_t \mid B)$ = *Meilleur prédicteur linéaire sans biais de* Y_t *basé sur les variables dans* B

$$\varepsilon(Y_t \mid B) = Y_t - P(Y_t \mid B) \tag{1.7}$$

$$\sigma^2(Y_t \mid B) = \mathsf{E}\left[\varepsilon(Y_t \mid B)^2\right] \tag{1.8}$$

1.2 Définition CAUSALITÉ AU SENS DE GRANGER.

(1) *Causalité.* X *cause* Y *ssi*

$$\sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t\right) < \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t \setminus \bar{X}_t\right)$$

pour au moins une valeur de t.

(2) *Causalité instantanée.* X *cause* Y *instantanément ssi*

$$\sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t,\, \bar{X}_{t+1}\right) < \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t\right)$$

pour au moins une valeur de t.

(3) *Rétroaction (ou feedback). Il y a rétroaction entre* X *et* Y *ssi* X *cause* Y *et* Y *cause* X .

1.3 Remarque Granger (1969, pp. 428-429) : Granger suppose la stationnarité.

1.4 Théorème INTERPRÉTATION DE LA NON-CAUSALITÉ.

(a) X *ne cause pas* Y

$$\begin{array}{ll} \textit{ssi} & \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t\right) = \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t \setminus \bar{X}_t\right) \ , \quad \forall t \\ \textit{ssi} & P\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t\right) = P\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t \setminus \bar{X}_t\right) \ \textit{p.s.}, \quad \forall t \,. \end{array}$$

(b) X *ne cause pas* Y *instantanément*

$$\begin{array}{ll} \textit{ssi} & \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t,\, X_{t+1}\right) = \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t\right) \ , \quad \forall t \\ \textit{ssi} & P\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t,\, X_{t+1}\right) = P\left(Y_{t+1} \mid \bar{A}_t\right) \ \textit{p.s.}, \quad \forall t \,. \end{array}$$

1.5 Théorème SYMÉTRIE DE LA CAUSALITÉ INSTANTANÉE. *X cause Y instantanément ssi Y cause X instantanément.*

On peut faire la distinction entre trois événements fondamentaux :

1. X cause Y;
2. Y cause X;
3. causalité instantanée.

À partir de ceux-ci, on peut définir $2^3 = 8$ relations de causalité représentables par des triplets $(x\ y\ z)$ où

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1, \text{ si } X \text{ cause } Y \ , \\ & = & 0, \text{ autrement,} \\ y & = & 1, \text{ si } Y \text{ cause } X \ , \\ & = & 0, \text{ autrement,} \\ z & = & 1, \text{ si causalité instantanée,} \\ & = & 0, \text{ autrement.} \end{array}$$

1.6 Définition RELATIONS ÉLÉMENTAIRES DE CAUSALITÉ.

	Notation	
	flèches	*triplets*
(1) *Indépendance de X et Y*	$(X\ Y)$	$(0\,0\,0)$
(2) *Causalité instantanée seulement*	$(X - Y)$	$(0\,0\,1)$
(3) *Causalité unidirectionnelle et non instantanée de X vers Y*	$(X \rightarrow Y)$	$(1\,0\,0)$
(4) *Causalité unidirectionnelle et instantanée de X vers Y*	$(X \Rightarrow Y)$	$(1\,0\,1)$
(5) *Causalité unidirectionnelle et non instantanée de Y vers X*	$(Y \rightarrow X)$	$(0\,1\,0)$
(6) *Causalité unidirectionnelle et instantanée de Y vers X*	$(Y \Rightarrow X)$	$(0\,1\,1)$
(7) *Rétroaction non instantanée*	$(X \leftrightarrow Y)$	$(1\,1\,0)$
(8) *Rétroaction et causalité instantanée*	$(X \Leftrightarrow Y)$	$(1\,1\,1)$

Cette nomenclature est donnée par Pierce et Haugh (1977, p. 268).

1.7 Remarque Granger (1969) considère :

(1) des processus stationnaires sur les entiers $\mathbb{Z}$;

(2) des prédictions linéaires sans biais optimaux au sens de l'erreur quadratique moyenne ;

(3) l'ensemble A_t contenant « toute l'information dans l'univers » ; mais indique

  (a) que les définitions pourraient être étendues à des processus non stationnaires (sans faire le développement) ;

  (b) qu'on peut considérer des ensembles d'information plus petits ;

  (c) que d'autres fonctions de perte pourraient être considérées.

(4) La définition du meilleur producteur linéaire sans biais (p. 429) est valable seulement pour des processus de moyenne nulle.

(5) Définition du retard de causalité (« causality lag ») confuse.

1.8 Remarque Pierce et Haugh (1977, p. 267) indique qu'il n'y a pas de problème à considérer la classe des prédictions d'erreur quadratique minimale.

1.9 Remarque Extensions de la notion de causalité. La notion de causalité au sens de Granger (1969) est relative à :

(1) une fonction de risque [*e.g.,* erreur quadratique moyenne] ;

(2) une forme fonctionnelle des prédicteurs ;

(3) l'ensemble d'information considéré ;

(4) le type de processus considéré [*e.g.,* stationnaire ou non stationnaire] ;

(5) le nombre d'étapes à l'avance dans la prédiction.

Dans le cas de la définition précédente, on peut partir de « causalité linéaire en moyenne quadratique par l'ensemble A » [Granger (1969, p. 430)].

2. Caractérisations de la causalité

2.1. Systèmes à deux variables

2.1.1. Processus stationnaires au sens large strictement non déterministes

Soit $A_t = \{X_t, Y_t\}$. $\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$ est un processus bivarié stationnaire au sens large (SSL) strictement non déterministe de moyenne zéro

$$\bar{X}_t = \{X_s : s \leq t\}\,, \quad \bar{Y}_t = \{Y_s : s \leq t\}\,.$$

2.1 Problème *Caractériser l'absence de causalité de X vers Y $(Y \nrightarrow X)$ ou de Y vers X $(Y \nrightarrow X)$.*

Par définition,

$$\begin{aligned}
X \nrightarrow Y \quad & \text{ssi} \quad \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{Y}_t,\, \bar{X}_t\right) = \sigma^2\left(Y_{t+1} \mid \bar{Y}_t\right) \\
& \text{ssi} \quad P\left(Y_{t+1} \mid \bar{Y}_t,\, \bar{X}_t\right) = P\left(Y_{t+1} \mid \bar{Y}_t\right) \text{ p.s.} \\
& \text{ssi} \quad P\left(Y_{t+1} \mid Y_t,\, Y_{t-1},\, \ldots,\, X_t,\, X_{t-1},\, \ldots\right) = P\left(Y_{t+1} \mid Y_t,\, Y_{t-1},\, \ldots\right)
\end{aligned}$$

2.1.1.1. Représentation moyenne mobile . $(X_t,\, Y_t)'$ possède une représentation moyenne mobile :

$$\binom{X_t}{Y_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \binom{a_{t-j}}{b_{t-j}} = \psi(B) \binom{a_t}{b_t} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(B) & \psi_{12}(B) \\ \psi_{21}(B) & \psi_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

où

$$\begin{aligned}
\psi(B) &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j\,, \quad \psi(z) \text{ convergent pour } \mid z \mid \leq 1, && (2.2)\\
\psi_j,\ j &= 0,\, 1,\, \ldots \text{ sont des matrices } 2 \times 2 && (2.3)\\
\psi_{ij}(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ij,k} B^k\,, \quad i,\, j = 1,\, 2, && (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\binom{a_t}{b_t} &= 0, && (2.5)\\
\mathsf{E}\left[\binom{a_t}{b_t}(a_s,\, b_s)\right] &= \begin{cases} \Sigma\,, & \text{si } t = s\,, \quad \Sigma \quad \text{p.d.} \\ 0\,, & \text{si } t \neq s\,, \end{cases} && (2.6)\\
\psi_0 &= I_2 \text{ ou } \Sigma = I_2 \quad \text{(condition d'identification).} && (2.7)
\end{aligned}$$

De plus, on peut montrer que X_t et Y_t possèdent des représentations moyennes mobiles univariées :

$$\begin{aligned}
X_t &= \psi_1(B)\, u_t\,, && (2.8)\\
Y_t &= \psi_2(B)\, v_t\,, && (2.9)
\end{aligned}$$

où $\{u_t\}$ et $\{v_t\}$ sont des bruits blancs,

$$\psi_i(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ik} B^k \ , \quad i = 1, 2 \qquad \psi_{10} = \psi_{20} = 1$$

On définit les autocorrélations croisées

$$\rho_{uv}(k) = \frac{\mathsf{E}[u_{t-k}v_t]}{[\mathsf{E}(u_t^2)\mathsf{E}(v_t^2)]^{1/2}} \tag{2.10}$$

2.2 Théorème CARACTÉRISATION MA DE LA NON-CAUSALITÉ (SIMS 1). *Soit $(X_t, Y_t)'$ un processus SSL strictement non déterministe. Alors X ne cause pas Y au sens de Granger $(X \nrightarrow Y)$ ssi il existe une représentation moyenne mobile de $(X_t, Y_t)'$ de la forme*

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(B) & \psi_{12}(B) \\ 0 & \psi_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix}$$

où $(a_t, b_t)'$ est un bruit blanc avec $\mathsf{E}(a_t) = \mathsf{E}(b_t) = 0$,

$$\mathsf{E}\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0}\,, \quad \mathsf{E}\left[\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}(a_s, b_s)\right] = \begin{cases} I_2\,, & \text{si } t = s\,, \\ 0\,, & \text{si } t \neq s\,, \end{cases} .$$

DÉMONSTRATION Voir Sims (1972). ∎

2.1.1.2. Représentation autorégressive . Si le processus $(X_t, Y_t)'$ possède une représentation autorégressive, nous avons

$$\Pi(B)\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(B) & \Pi_{12}(B) \\ \Pi_{21}(B) & \Pi_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

où

$$\Pi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{ij,k} B^k\,, \tag{2.12}$$

$$\Pi(B) = \psi(B)^{-1}\,. \tag{2.13}$$

Dans ce cas, on peut aussi montrer que chaque processus X_t et Y_t possède une représentation autorégressive univariée :

$$\Pi_1(B)\,X_t = u_t \tag{2.14}$$

$$\Pi_2(B)\,Y_t \;=\; v_t \tag{2.15}$$

où $\{u_t\}$ et $\{v_t\}$ sont des bruits blancs.

2.3 Théorème CARACTÉRISATION DE LA NON-CAUSALITÉ PAR UNE RÉGRESSION BILATÉRALE (SIMS 2). *Soit (X_t, Y_t) un processus SSL strictement non déterministe de moyenne zéro et possèdent une représentation autorégressive. Alors X ne cause pas Y au sens de Granger ssi X_t peut s'exprimer sous la forme*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j Y_{t-j} + \eta_t$$

où $\mathsf{E}(Y_t \eta_s) = 0, \quad \forall s,\ \tau.$

2.4 Théorème CARACTÉRISATION DE LA NON-CAUSALITÉ PAR LES INNOVATIONS UNIVARIÉES (PIERCE-HAUGH). *(Pierce-Haugh 1) Soit $(X_t, Y_t)'$ un processus SSL strictement non déterministe. Supposons en outre que X_t et Y_t possèdent chacun une représentation autorégressive :*

$$\Pi_1(B)\,X_t = u_t, \quad \Pi_2(B)\,Y_t = v_t$$

où $\{u_t\}$ et $\{v_t\}$ sont des bruits blancs. Alors, X ne cause pas Y au sens de Granger ssi

$$\rho_{uv}(k) = 0, \quad \forall k > 0\ .$$

2.1.1.3. Représentation ARMA . Supposons que $Z_t = (X_t, Y_t)'$ possède une représentation ARMA

$$\phi(B)\,Z_t = \theta(B)\,u_t$$

où

$$\phi(B) \;=\; \sum_{j=0}^{p} \phi_j B^j, \quad \phi_0 = I_2\,, \tag{2.16}$$

$$\theta(B) \;=\; \sum_{j=0}^{q} \theta_j B^j, \quad \theta_0 = I_2\,, \tag{2.17}$$

$$\mathsf{E}\left(u_t u_{t+k}'\right) \;=\; \begin{cases} \Sigma\,, & \text{si } k = 0 \\ 0\,, & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

et Σ est p.d. De façon plus explicite,

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

où

$$\phi_{ij} \equiv \phi_{ij}(B) = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^{p} \phi_{ijk} B^k, \tag{2.19}$$

$$\theta_{ij} \equiv \theta_{ij}(B) = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^{q} \theta_{ijk} B^k, \ i, \, j = 1, \, 2 \, . \tag{2.20}$$

Kang (1981, pp. 98-99) donne les conditions suivantes pour différentes catégories de processus.

1. Processus autorégressif pur _ Si

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix},$$

   on a

$$X \nrightarrow Y \quad \text{ssi} \quad \phi_{21} = 0 \, . \tag{2.21}$$

2. Processus moyenne mobile pur _ Si

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix},$$

   on a

$$X \nrightarrow Y \quad \text{ssi} \quad \theta_{21} = 0 \, . \tag{2.22}$$

3. Processus mixte

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

   (a) Condition suffisante

$$\text{Si} \quad \phi_{21} = 0 \quad \text{et} \quad \theta_{12} = \theta_{21} = 0, \text{ alors } X \nrightarrow Y$$

   Cette condition correspond à une représentation de la forme :

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 \\ 0 & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

   (b) Condition nécessaire et suffisante

$$X \nrightarrow Y \quad \text{ssi} \quad \phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11} = 0$$

$$\text{ssi} \quad \det \begin{bmatrix} \phi_{11} & \theta_{11} \\ \phi_{21} & \theta_{21} \end{bmatrix} = 0$$

On peut démontrer la condition nécessaire et suffisante pour la non-causalité dans modèle ARMA bivarié de la manière suivante [Kang (1981, pp. 98-99)]. Nous avons

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}.$$

Comme

$$\theta^{-1} = \frac{1}{\det(\theta)} \begin{bmatrix} \theta_{22} & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & \theta_{11} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} &= \theta^{-1}\phi \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\theta)} \begin{pmatrix} \theta_{22} & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & \theta_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\theta)} \begin{pmatrix} \phi_{11}\theta_{22} - \phi_{21}\theta_{12} & \phi_{12}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{12} \\ -(\phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11}) & -(\phi_{12}\theta_{21} - \phi_{22}\theta_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\theta)} \begin{pmatrix} \phi_{11}\theta_{22} - \phi_{21}\theta_{12} & \phi_{12}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{12} \\ \phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21} & \phi_{22}\theta_{11} - \phi_{12}\theta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} X \nrightarrow Y &\iff \phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21} = 0 \\ &\iff \phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11} = 0 \\ &\iff \det \begin{bmatrix} \phi_{11} & \theta_{11} \\ \phi_{21} & \theta_{21} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} Y \quad \nrightarrow \quad X &\iff \phi_{12}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{12} = 0 \\ &\iff \det \begin{bmatrix} \phi_{12} & \theta_{12} \\ \phi_{22} & \theta_{22} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

On notera ici que $\phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11}$ est un polynôme qui contient seulement des puissances plus grandes ou égales à 1.

Il peut être intéressant d'examiner la relation entre la condition nécessaire et suffisante de non-causalité dans un processus ARMA bivarié avec le théorème de Sims. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} && (2.27) \\
\phi \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} &= \theta \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} && (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{-1} &= \frac{1}{\mid \theta \mid} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{12} \\ -\phi_{21} & \phi_{11} \end{pmatrix} && (2.29) \\
\mid \phi \mid &= \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} && (2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mid \phi \mid \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_{22}\theta_{11} - \phi_{12}\theta_{21} & \phi_{22}\theta_{12} - \phi_{12}\theta_{22} \\ -\phi_{21}\theta_{11} + \phi_{11}\theta_{21} & -\phi_{21}\theta_{12} + \phi_{11}\theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} && (2.31) \\
&= \begin{bmatrix} \phi_{22}\theta_{11} - \phi_{12}\theta_{21} & -\left(\phi_{12}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{12}\right) \\ -\left(\phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21}\right) & \phi_{11}\theta_{22} - \phi_{21}\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} && (2.32)
\end{aligned}$$

Pour pouvoir utiliser le théorème 1 de Sims (1972), il faudrait que $\mathsf{E}\left(u_{1t}u_{2t}\right) = 0$. Soit

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

une matrice 2×2 telle que

$$P^{-1}\Sigma\left(P^{-1}\right)' = I$$

et donc

$$\Sigma = PP'. \tag{2.34}$$

Alors,

$$P^{-1}u_t = \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathsf{E}\left(a_t b_s\right) = 0, \quad \forall t,\ s\,, \tag{2.35}$$

et

$$\mid \phi \mid \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{22}\theta_{11} - \phi_{12}\theta_{21} & -\left(\phi_{12}\theta_{22} - \phi_{22}\theta_{12}\right) \\ -\left(\phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21}\right) & \phi_{11}\theta_{22} - \phi_{21}\theta_{12} \end{bmatrix} PP^{-1} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

On voit que

$$X \nrightarrow Y \quad \text{ssi} \quad -p_{11}\left(\phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21}\right) + p_{21}\left(\phi_{11}\theta_{22} - \phi_{21}\theta_{12}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{ssi} \quad \phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21} &= \frac{p_{21}}{p_{11}} (\phi_{11}\theta_{22} - \phi_{21}\theta_{12}) \\
\text{ssi} \quad \phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11} &= \frac{p_{21}}{p_{11}} (\phi_{21}\theta_{12} - \phi_{11}\theta_{22}) \ .
\end{aligned}$$

2.5 Remarque On peut toujours choisir P de la forme [Rao (1973, section 1b.2, p. 20)] :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{où } p_{11} \neq 0 \text{ et } p_{22} \neq 0.$$

La condition de Kang est correcte. Le coefficient de L^o dans $\phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11}$ est 0. Le coefficient de L^o dans $\phi_{21}\theta_{12} - \phi_{11}\theta_{22}$ est -1 [à cause des contraintes sur $\phi_{ij}(0)$ et $\theta_{ij}(0)$]. La condition $(*)$ ne peut être variée que si $p_{21} = 0$ et alors on doit avoir $\phi_{21}\theta_{11} - \phi_{11}\theta_{21} = 0$.

2.2. Systèmes à plusieurs variables

2.2.1. Condition nécessaire et suffisante de non-causalité pour un processus ARMA multivarié

Considérons un processus qui satisfait un modèle de la forme :

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{array}{l} \phi_{ij} : k_i \times k_j \quad i,\, j = 1,\, 2, \\ \theta_{ij} : k_i \times k_j \,, \\ X_t : k_1 \times 1, \quad Y_t : k_2 \times 1 \,. \end{array} \tag{2.37}$$

$$\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{-1}\left(I + \theta_{12}D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\right) & -\theta_{11}^{-1}\theta_{12}D^{-1} \\ -D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

$$D = \theta_{22} - \theta_{21}\theta_{11}^{-1}\theta_{12} \,, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} &= \theta^{-1}\phi \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c} \theta_{11}^{-1}\left(I + \theta_{12}D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\right)\phi_{11} - \theta_{11}^{-1}\theta_{12}D^{-1}\phi_{21} \\ -D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{11} + D^{-1}\phi_{21} \end{array} \right. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \\
&\qquad \left. \begin{array}{c} \theta_{11}^{-1}\left(I + \theta_{12}D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\right)\phi_{12} - \theta_{11}^{-1}\theta_{12}D^{-1}\phi_{22} \\ -D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{12} + D^{-1}\phi_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X \nrightarrow Y &\iff -D^{-1}\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{11} + D^{-1}\phi_{21} = 0 \\
&\iff -\theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{11} + \phi_{21} = 0 \\
&\iff \phi_{21} - \theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{11} = 0 \iff \phi_{21}\phi_{11}^{-1} = \theta_{21}\theta_{11}^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Si $k_1 = 1$, ϕ_{11} et θ_{11} sont des scalaires et

$$\phi_{21} - \theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{11} = 0 \iff \phi_{21}\theta_{11} - \theta_{21}\phi_{11} = 0\,.$$

Si $k_1 \geq 2$, les deux conditions

$$\phi_{21} - \theta_{21}\theta_{11}^{-1}\phi_{11} = 0 \quad \text{et} \quad \phi_{21}\theta_{11} - \theta_{21}\phi_{11} = 0$$

ne sont pas équivalentes.

2.2.2. Détermination de la structure de causalité associée à un modèle ARMA

Considérons un processus ARMA stationnaire et inversible de la forme :

$$\phi(B)\,Z_t = \theta(B)\,u_t\,,$$

$$Z_t = (Z_{1t},\, \ldots\,,\, Z_{kt})'\,, \quad u_t = (u_{1t},\, \ldots\,,\, u_{kt})'\,. \tag{2.40}$$

On peut réécrire

$$
\begin{aligned}
\theta(B)^{-1}\,\phi(B)\,Z_t &= u_t \\
\mathit{\Pi}(B)\,Z_t &= u_t\,, \\
\underline{\mathit{\Pi}}_i(B)'\,Z_t &= u_{it}\,,
\end{aligned}
$$

$$\mathit{\Pi}(B) \equiv \theta(B)^{-1}\,\phi(B) = \begin{bmatrix} \underline{\mathit{\Pi}}_i(B)' \\ \vdots \\ \underline{\mathit{\Pi}}_k(B)' \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

$$\mathit{\Pi}_i(B)' = [\mathit{\Pi}_{i1}(B)\,,\, \ldots\,,\, \mathit{\Pi}_{ik}(B)]\,. \tag{2.42}$$

Calculons

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Pi}(z) &= \theta(z)^{-1}\,\phi(z) \\
&= [\mathit{\Pi}_{ij}(z)]_{i,j=1,\ldots,k}
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

où z est un nombre réel tel que $0 < |z| < 1$, *e.g.* $z = 1/2$ (choisi au hasard). Avec probabilité 1, on peut dire que

$$Z_j \nrightarrow Z_i \Longleftrightarrow \Pi_{ij}(Z) = 0$$

où $i \neq j$. Il peut être prudent de considérer quelques valeurs de z. Si

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \Pi_{ij}(z) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \Pi_{ij}(z) = 0 \end{cases}, \tag{2.44}$$

on peut décrire la structure de causalité en écrivant la matrice A.

2.6 Exemple $k = 4$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{array} \qquad\qquad Z_4 \to Z_1 \to Z_3 \to Z_2 \\ \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\,, \\ \begin{array}{lll} Z_1 \nrightarrow Z_2, & Z_1 \nrightarrow Z_3, & Z_1 \nrightarrow Z_4 \\ Z_2 \nrightarrow Z_1, & Z_2 \nrightarrow Z_3, & Z_2 \nrightarrow Z_4 \\ Z_3 \nrightarrow Z_1, & Z_3 \nrightarrow Z_2, & Z_3 \nrightarrow Z_4 \\ Z_4 \nrightarrow Z_1, & Z_4 \nrightarrow Z_2, & Z_4 \nrightarrow Z_3 \end{array} . \end{array}$$

3. Notes bibliographiques

Le lecteur trouvera des discussions générales du concept de causalité et de ses applications en économétrie dans Pierce et Haugh (1977, 1979), Hosoya (1977), Price (1979), Zellner (1979), Granger (1980), Newbold (1982), Geweke (1984), Gouriéroux et Monfort (1990, Chapter X) and Lütkepohl (1991). Sur les modèles à plus de deux variables, le lecteur peut aussi consulter Boudjellaba, Dufour et Roy (1992), Dufour et Tessier (1993), Boudjellaba, Dufour et Roy (1994), Dufour, Nsiri et Tessier (1994), Dufour et Tessier (1997), Dufour et Renault (1998).

Références

Boudjellaba, H., Dufour, J.-M. et Roy, R. (1992), 'Testing causality between two vectors in multivariate ARMA models', *Journal of the American Statistical Association* **87**, 1082–1090.

Boudjellaba, H., Dufour, J.-M. et Roy, R. (1994), 'Simplified conditions for non-causality between two vectors in multivariate ARMA models', *Journal of Econometrics* **63**, 271–287.

Dufour, J.-M., Nsiri, S. et Tessier, D. (1994), Parsimonious autoregressive conditions for non-causality in multivariate ARMA models, *in* 'Proceedings of the Business and Economic Statistics Section of the American Statistical Association', Washington (D.C.), pp. 129–134.

Dufour, J.-M. et Renault, E. (1998), 'Short-run and long-run causality in time series : Theory', *Econometrica* **66**, 1099–1125.

Dufour, J.-M. et Tessier, D. (1993), 'On the relationship between impulse response analysis, innovation accounting and Granger causality', *Economics Letters* **42**, 327–333.

Dufour, J.-M. et Tessier, D. (1997), 'La causalité entre la monnaie et le revenu : une analyse de causalité basée sur un modèle ARMA-échelon', *L'Actualité économique* **73**, 351–366.

Geweke, J. (1984), Inference and causality in economic time series, *in* Z. Griliches et M. D. Intrilligator, eds, 'Handbook of Econometrics, Volume 2', North-Holland, Amsterdam, pp. 1102–1144.

Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1990), *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Economica, Paris.

Granger, C. W. J. (1969), 'Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods', *Econometrica* **37**, 424–459.

Granger, C. W. J. (1980), 'Testing for causality : A personal viewpoint', *Journal of Economic Dynamics and Control* **2**(4), 329–352.

Hosoya, Y. (1977), 'On the Granger condition for non-causality', *Econometrica* **45**, 1735–1736.

Kang, H. (1981), 'Necessary and sufficient conditions for causality testing in multivariate ARMA models', *Journal of Time Series Analysis* **2**, 95–101.

Lütkepohl, H. (1991), *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

Newbold, P. (1982), Causality testing in economics, *in* O. D. Anderson, ed., 'Time Series Analysis : Theory and Practice 1', North-Holland, Amsterdam.

Pierce, D. A. et Haugh, L. D. (1977), ‘Causality in temporal systems : Characterizations and survey’, *Journal of Econometrics* **5**, 265–293.

Pierce, D. A. et Haugh, L. D. (1979), ‘The characterization of instantaneous causality, a comment’, *Journal of Econometrics* **10**, 257–259.

Price, J. M. (1979), ‘The characterization of instantaneous causality : A correction’, *Journal of Econometrics* **10**(2), 253–256.

Rao, C. R. (1973), *Linear Statistical Inference and its Applications*, second edn, John Wiley & Sons, New York.

Sims, C. (1972), ‘Money, income and causality’, *American Economic Review* **540-552**, 540–552.

Zellner, A. (1979), ‘Causality and econometrics’, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, a supplementary series to the Journal of Monetary Economics* **10**, 9–54. Discussion by Charles R. Nelson, 97-102.