Jean-Marie Dufour
18 avril 2006

Université de Montréal
Département de sciences économiques
ECN 6238
Macroéconométrie
Examen final

Aucune documentation permise
Calculatrice permise
Durée : 3 heures

10 points 1. Considérez le modèle $MA(1)$ suivant :

$$X_t = \overline{\mu} + u_t - \theta u_{t-1} \,, \; t \in \mathbb{Z}$$

où $u_t \sim WN(0,\, \sigma^2)$ et $\sigma^2 > 0.$

(a) Prouvez que la première autocorrélation de ce modèle ne peut être plus grande que 0.5 en valeur absolue.

(b) Trouvez les valeurs des paramètres de ce modèle pour lesquelles la borne supérieure est atteinte.

10 points 2. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire du second ordre et soit

$$Y_t = (1 - 0.4B)X_t = X_t - 0.4\, X_{t-1}$$

$$Z_t = (1 - 2.5B)X_t = X_t - 2.5\, X_{t-1}.$$

Montrez que Y_t et Z_t ont la même fonction d'autocorrélation.

15 points 3. Considérez le modèle décrit par les hypothèses suivantes :

(1) $Y_t = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j Y_{t-j} + u_t \,, \quad t = p+1,\, \dots\, ,\, T\,;$

(2) $\{u_t : t = 1,\, \dots\, ,\, T\} \sim IID(0,\, \sigma^2)\,;$

(3) le polynôme $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_1 z^2 - \cdots - \varphi_p z^p$ a toutes ses racines sur le cercle unité sauf possiblement une qui peut être égale à 1.

Décrivez une procédure qui permet de tester l'hypothèse que le polynôme $\varphi(z)$ a une racine sur le cercle unité.

45 points 4. Considérez le processus décrit par le modèle suivant :

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.5B & 0 \\ -0.5B & 1 - 0.2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

où $t \in \mathbb{Z}$, $a_t = [a_{1t},\, a_{2t}]'$ est un bruit blanc $N[0,\, \Sigma]$ avec

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) De quel type de processus s'agit-il ?

(b) Ce processus est-il stationnaire au sens strict ? Pourquoi ?

(c) Ce processus est-il stationnaire au sens large ? Pourquoi ?

(d) Ce processus possède-t-il une représentation de Wold ? Si oui, donnez celle-ci.

(e) Calculez les 3 premières matrices d'autocovariance de ce processus.

(f) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?

(g) Ce processus possède-t-il une représentation autorégressive ? Si oui, donnez celle-ci.

(h) La variable X_{2t} cause-t-elle X_{1t} au sens de Granger ? Justifiez votre réponse.

(i) La variable X_{1t} cause-t-elle X_{2t} au sens de Granger ? Justifiez votre réponse.

(j) Y a-t-il causalité instantanée entre X_{1t} et X_{2t}? Justifiez votre réponse.

(k) Si $X_{1t} = 1$, $X_{2t} = 0.5$, $X_{1,t-1} = 2$, $X_{2,t-1} = -2$ et $X_{1,t-k} = X_{2,t-k} = 0$ pour $k \geq 2$, calculez les meilleures prévisions linéaires (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de $X_{1,t+1}$ et de $X_{1,t+2}$ fondées sur les observations X_s, $s \leq t$.

(l) Si $X_{1t} = 1$, $X_{2t} = 0.5$, $X_{1,t-1} = 2$, $X_{2,t-1} = -2$ et $X_{1,t-k} = X_{2,t-k} = 0$ pour $k \geq 2$, calculez les meilleures prévisions (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de $X_{1,t+1}$ et de $X_{1,t+2}$ fondées sur les observations X_s, $s \leq t$.

20 points 5. Décrivez l 'approche de Tiao et Box (JASA, 1981) pour l 'identification et l'estimation de modèles ARMA multivariés. En particulier, soyez certains de préciser :

(a) la classe de modèles utilisés ;

(b) la méthode employée pour identifier l'ordre d'un processus MA ;

(c) la méthode employée pour identifier l'ordre d'un processus AR ;

(d) l'approche employée pour l'estimation et la validation du modèle.