Jean-Marie Dufour
26 avril 2005

Université de Montréal
ECN 6238
Économétrie des séries chronologiques
Examen final

Aucune documentation permise
Calculatrice permise
Durée : 3 heures

10 points

1. Discutez les conditions de convergence de la série

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$$

où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\} \sim BB(0, \sigma^2)$. En particulier,

(a) $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre 2 ;

(b) $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre $r > 0$;

(c) $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge presque sûrement ;

(d) $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en probabilité.

20 points

2. Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus ARMA$(1, 1)$ satisfaisant l'équation

$$X_t - \varphi\, X_{t-1} = u_t + \theta u_{t-1}\ ,\ u_t \sim BB(0,\ \sigma^2)\ ,$$

où $|\varphi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

(a) Déterminez les coefficients ψ_j de la représentation MA(∞) de X_t .

(b) Déterminez la fonction d'autocorrélation de X_t.

(c) Donnez la densité spectrale de X_t.

(d) Si $\varphi = 0.5$, $\theta = 0.5$, $X_{10} = 1.0$, $u_{10} = 0.5$ et $X_t = u_t = 0$ pour $t \leq 9$, donnez des prévisions optimales (au sens de l'erreur quadratique moyenne) pour X_{11} et X_{12}.

15 points 3. Considérez le modèle décrit par les hypothèses suivantes :

(1) $Y_t = \mu_0 + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j Y_{t-j} + u_t\,, \quad t = p+1, \ldots, T\,;$

(2) $\{u_t : t = 1, \ldots, T\} \sim IID(0, \sigma^2)\,;$

(3) le polynôme $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_1 z^2 - \cdots - \varphi_p z^p$ a toutes ses racines sur le cercle unité sauf possiblement une qui peut être égale à 1.

Décrivez une procédure qui permet de tester l'hypothèse que le polynôme $\varphi(z)$ a une racine sur le cercle unité.

15 points 4. Fonctions de transfert

(a) Décrivez ce qu'est un modèle de fonction de transfert dans l'analyse des séries chronologiques.

(b) Décrivez brièvement comment fonctionne, pour un modèle de fonction de transfert, la méthode d'identification de Box et Jenkins.

(c) Décrivez brièvement comment fonctionne, pour un modèle de fonction de transfert, la méthode d'identification de Haugh et Box.

40 points 5. Soit $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire au sens large strictement non déterministe.

(a) Que veut-on dire par l'expression "stationnaire au sens large" ?

(b) Qu'implique le théorème de Wold multivarié pour ce processus ?

(c) Que veut dire l'expression "strictement non déterministe" ?

(d) Expliquez les expressions suivantes :

i. X cause Y ;

ii. Y cause X instantanément ;

iii. il y a rétroaction entre X et Y.

(e) Si on dit que (X_t, Y_t) suit un processus ARMA, qu'est-ce que cela signifie ?

(f) En supposant que (X_t, Y_t) possède une représentation autorégressive, donnez une caractérisation de la relation $X \nrightarrow Y$:

i. à partir de la représentation autorégressive du processus (X_t, Y_t);

ii. à partir de la représentation moyenne mobile du processus (X_t, Y_t);

iii. à partir des représentation univariées des processus X_t et Y_t.

(g) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que les processus X et Y sont indépendant entre eux.

(h) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que X cause Y au sens de Granger.