

**Université de Montréal**  
**ECN 6238**  
**Économétrie des séries chronologiques**  
**Examen final**

Aucune documentation permise  
Calculatrice permise  
Durée : 3 heures

- 10 points 1. Démontrez que la fonction d'autocovariance d'un processus stochastique stationnaire du second ordre (sur les entiers) est nécessairement paire et positive semi-définie.
- 15 points 2. Soit le processus
- $$(1 - B + 0.25 B^2)X_t = (1 + B)u_t$$
- où  $(u_t : t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$ .
- (a) Ce processus est-il stationnaire causal ?
- (b) Si oui, trouvez
- les coefficients de la représentation moyenne mobile de  $X_t$  ;
  - la fonction d'autocovariance de  $X_t$  .
- 15 points 3. Considérez le modèle décrit par les hypothèses suivantes :
- $Y_t = \sum_{j=1}^p \varphi_j Y_{t-j} + u_t, \quad t = p + 1, \dots, T$  ;
  - $\{u_t : t = 1, \dots, T\} \sim IID(0, \sigma^2)$  ;
  - le polynôme  $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_1 z^2 - \dots - \varphi_p z^p$  a toutes ses racines sur le cercle unité sauf possiblement une qui peut être égale à 1.
- Décrivez une procédure qui permet de tester l'hypothèse que le polynôme  $\varphi(z)$  a une racine sur le cercle unité.
- 40 points 4. Soit  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathbb{Z}\}$  un processus stationnaire au sens large strictement non déterministe.
- (a) Que veut-on dire par l'expression "stationnaire au sens large" ?

- (b) Qu'implique le théorème de Wold multivarié pour ce processus ?
- (c) Que veut dire l'expression "strictement non déterministe" ?
- (d) Expliquez les expressions suivantes :
  - i.  $X$  cause  $Y$  ;
  - ii.  $Y$  cause  $X$  instantanément ;
  - iii. il y a rétroaction entre  $X$  et  $Y$ .
- (e) Si on dit que  $(X_t, Y_t)$  suit un processus ARMA, qu'est-ce que cela signifie ?
- (f) En supposant que  $(X_t, Y_t)$  possède une représentation autorégressive, donnez une caractérisation de la relation  $X \rightarrow Y$  :
  - i. à partir de la représentation autorégressive du processus  $(X_t, Y_t)$ ;
  - ii. à partir de la représentation moyenne mobile du processus  $(X_t, Y_t)$ ;
  - iii. à partir des représentation univariées des processus  $X_t$  et  $Y_t$ .
- (g) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que les processus  $X$  et  $Y$  sont indépendants entre eux.
- (h) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que  $X$  cause  $Y$  au sens de Granger.

20 points

5. Décrivez l'approche de Tiao et Box (JASA, 1981) pour l'identification et l'estimation de modèles ARMA multivariés. En particulier, soyez certains de préciser :
- (a) la classe de modèles utilisés ;
  - (b) la méthode employée pour identifier l'ordre d'un processus MA ;
  - (c) la méthode employée pour identifier l'ordre d'un processus AR ;
  - (d) l'approche employée pour l'estimation et la validation du modèle.