Lissage exponentiel *

Jean-Marie Dufour †
Université de Montréal

Première version: Mars 1987
Révisions: Mars 2002
Cette version: 17 février 2003
Compilé: 17 février 2003, 11:29am

*Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS) et du Fonds FCAR du Québec.

† L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

Liste de définitions, propositions et théorèmes

1. Lissage exponentiel simple

On dispose d'une série $X_1, ..., X_T$ et on désire prédire $X_{T+h}\,(h \geq 1)$. Dénotons la prévision par $\hat{X}_T\,(h)$.

1.1 Définition *La valeur $\hat{X}_T\,(h)$ fournie par la méthode du lissage exponentiel simple avec la constante de lissage $\beta\,(0 < \beta < 1)$ est*

$$\hat{X}_T\,(h) = (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j}\ . \tag{1.1}$$

$\hat{X}_T\,(h)$ est une moyenne des observations passées où le poids de chaque observation décroît de façon exponentielle avec la distance.

Notons que $\hat{X}_T\,(h)$ ne dépend pas de h :

$$\hat{X}_T\,(h) \equiv \hat{X}_T\ .$$

1.1. Formule adaptative

On peut réécrire autrement la formule de calcul de $\hat{X}_T\,(h)$:

$$\beta \hat{X}_{T-1} = (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-2} \beta^{j+1} X_{T-(j+1)} = (1-\beta) \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j X_{T-j}\ ,$$

d'où l'erreur de prévision

$$\begin{aligned} \hat{X}_T - \beta \hat{X}_{T-1} &= (1-\beta) \left[\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} - \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j X_{T-j} \right] \\ &= (1-\beta)\, X_T\ . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\hat{X}_T = \beta \hat{X}_{T-1} + (1-\beta)\, X_T \tag{1.2}$$

est une moyenne pondérée de $\hat{X}_{T-1}\,(h)$ et X_T. On peut aussi écrire $\hat{X}_T$ sous une forme adaptative :

$$\hat{X}_T = \hat{X}_{T-1} + (1-\beta) \left[X_T - \hat{X}_{T-1} \right]\ . \tag{1.3}$$

On peut calculer $\hat{X}_T$ à partir de (1.2) et (1.3) en posant

$$\hat{X}_1 = X_1\ .$$

1.2. Dérivation de la formule de lissage exponentiel simple

Cherchons la constante telle que

$$\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j} - a\right)^2 \text{ est minimal.}$$

Soit

$$S \equiv \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j} - a\right)^2 \ . \tag{1.1}$$

En prenant la dérivée de S par rapport à a, et en annulant

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j} - \hat{a}\right) = 0 \ ,$$

on obtient, pour $\beta \neq 1$,

$$\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} = \hat{a} \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j = \hat{a}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} \\ &\simeq \hat{X}_T \quad \text{pour } T \text{ grand.} \end{aligned}$$

$\hat{X}_T$ est la constante qui s'ajuste le mieux au voisinage de T. Si $\beta = 1$,

$$S \equiv \sum_{j=0}^{T-1} \left(X_{T-j} - a\right)^2 \ , \tag{1.2}$$

et

$$\hat{a} = \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{T-1} X_{T-j} \ . \tag{1.3}$$

1.3. Choix de la constante de lissage

Considérons une série X_T qui suit un processus $AR(1)$:

$$\begin{aligned} X_t &= \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1 \\ & \varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} (0,1) \ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E(X_t) &= 0, \quad V(X_t) = 1/\left(1-\rho^2\right) \ , \\ cov(X_t, X_{t+h}) &= \rho^{|h|} \ . \end{aligned}$$

Supposons que l'on désire choisir β tel que

$$E\left\{\sum_{t=1}^{T-h_0}\left[X_{t+h_0} - \hat{X}_T(h_0)\right]^2\right\} \equiv D_\rho(h_0, \beta)$$

soit le plus petit possible.

On peut montrer que

$$\begin{aligned} D_\rho(h,\beta) &= \frac{2}{1+\beta} + \frac{2(1-\beta)\left(\beta\rho - \rho^h - \beta\rho^h\right)}{(1+\beta)(1-\beta\rho)} \ , \\ D_\rho(1,\beta) &= \frac{2(1-\rho)}{(1+\beta)(1-\beta\rho)} \equiv D_\rho \ , \\ \frac{\partial \log(D_\rho)}{\partial\beta} &= \frac{\rho + 2\beta\rho - 1}{(1+\beta)(1-\beta\rho)} \ . \end{aligned}$$

Si $\frac{1}{3} \leq \rho < 1$, le minimum est à $\beta = (1-\rho)\ /\ 2\rho$.
Si $-1 < \rho < \frac{1}{3}$, le minimum est à $\beta = 1$.

Voir le Graphique de $D_\rho(1,\beta)$ dans Gouriéroux et Monfort (1983, p. 127) :

pour ρ négatif, l'EQM est élevée.

pour ρ positif, $D_\rho(1,\beta)$ est relativement plate.

Ceci suggère $\beta = 0.8$ ou 0.7.

2. Lissage exponentiel double

Le lissage exponentiel simple est bien adapté au cas où la série a une moyenne approximativement constante au voisinage de T.À la place, supposons que la série peut être approximée par une droite au voisinage de T :

$$y_t = a_1 + a_2 \left(t - T\right) \ .$$

Ceci suggère une prévision de la forme :

$$\hat{X}_T\left(h\right) = \hat{a}_1\left(T\right) + \hat{a}_2\left(T\right) h \tag{2.1}$$

où $\hat{a}_1\left(T\right)$ et $\hat{a}_2\left(T\right)$ sont choisis de façon à minimiser

$$Q = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 j\right)^2 \ . \tag{2.2}$$

En différentiant Q, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a_1} &= -2 \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 j\right) = 0 \ , \\
\frac{\partial Q}{\partial a_2} &= 2 \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j \left(X_{T-j} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2 j\right) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} - \hat{a}_1 \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + \hat{a}_2 \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j &= 0 \ , \\
\sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j X_{T-j} - \hat{a}_1 \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j + \hat{a}_2 \sum_{j=0}^{T-1} j^2\beta^j &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Remplaçons

$$\begin{array}{lcl}
\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j & \text{par} & \dfrac{1}{1-\beta} \\
\sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j & \text{par} & \dfrac{\beta}{\left(1-\beta\right)^2} \\
\sum_{j=0}^{T-1} j^2\beta^j & \text{par} & \dfrac{\beta\left(1+\beta\right)}{\left(1-\beta\right)^3}
\end{array}$$

(limites lorsque $T \to \infty$). On obtient alors :

$$\begin{aligned} (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j X_{T-j} - \hat{a}_1 + \hat{a}_2\frac{\beta}{1-\beta} = 0 \ , \\ (1-\beta)^2\sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j X_{T-j} - \hat{a}_1\beta + \hat{a}_2\frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Définissons

$$\begin{aligned} S_1(t) &= (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j X_{T-j} \ , \\ S_2(t) &= (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j S_1(t-j) \\ &= (1-\beta)^2\sum_{k=0}^{T-1}k\beta^k X_{t-k} + (1-\beta)S_1(t) \ , \end{aligned}$$

où on voit que $S_2(t)$ correspond à un double lissage. Substituant $S_1(t)$ et $S_2(t)$ dans (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} & S_1(T) - \hat{a}_1 + \hat{a}_2\frac{\beta}{1-\beta} = 0 \ , \\ & S_2(T) - (1-\beta)S_1(T) - \hat{a}_1\beta + \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta}\hat{a}_2 = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

d'où

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(T) &= 2S_1(T) - S_2(T) \ , \\ \hat{a}_2(T) &= \frac{1-\beta}{\beta}\left[S_1(T) - S_2(T)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Formule mise à jour _ Comme

$$\begin{aligned} S_1(T) &= \beta S_1(T-1) + (1-\beta)X_T \ , \\ S_2(T) &= \beta S_2(T-1) + (1-\beta)S_1(T) \\ &= \beta S_2(T-1) + (1-\beta)\left[\beta S_1(T-1) + (1-\beta)X_T\right] \\ &= \beta S_2(T-1) + \beta(1-\beta)S_1(T-1) + (1-\beta)^2 X_T \ , \end{aligned}$$

on voit que

$$\hat{a}_1(T) = 2S_1(T) - S_2(T)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1-\beta^2\right) X_T + \beta^2 \left[\hat{a}_1 (T-1) + \hat{a}_2 (T-1)\right] \\
&= \left(1-\beta^2\right) X_T + \beta^2 \hat{X}_{T-1}(1) \\
&= \hat{a}_1 (T-1) + \hat{a}_2 (T-1) + \left(1-\beta^2\right) \left[X_T - \hat{X}_{T-1}(1)\right] \\
&= \hat{X}_{T-1}(1) + \left(1-\beta^2\right) \left[X_T - \hat{X}_{T-1}(1)\right] \ , \\
\hat{a}_2 (T) &= \hat{a}_2 (T-1) + (1-\beta)^2 \left[X_T - \hat{X}_{T-1}(1)\right] \ .
\end{aligned}
$$

Dans le cas de la prévision parfaite $\left[X_T = \hat{X}_{T-1}(1)\right]$,

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_1 (T) &= \hat{a}_1 (T-1) + \hat{a}_2 (T-1) = \hat{X}_{T-1}(1) \ , \\
\hat{a}_2 (T) &= \hat{a}_2 (T-1) \ .
\end{aligned}
$$

3. Lissage exponentiel généralisé

Les méthodes de lissage exponentiel simple et double ajustent une constante ou une droite en donnant un poids plus grand aux observations dans le voisinage de T.

Considérons une fonction de la forme

$$\varphi(t-T) = f(t-T)' a = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j (t-T)$$

où

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \left[f_1(t), ..., f_n(t)\right] \ , \\
a &= (a_1, ..., a_n)' \ .
\end{aligned}
$$

On désire ajuster la fonction $\varphi(t-T) = f(t-T)' a$ de façon à minimiser une somme pondérée des écarts

$$\left[X_{T-j} - \varphi\left[(T-j) - T\right]\right]^2 = \left[X_{T-j} - f(-j)' a\right]^2 \ .$$

Si on adopte une pondération exponentielle, le problème revient à minimiser

$$S(a) = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left[X_{T-j} - f(-j)' a\right]^2 \ . \tag{3.1}$$

Pour obtenir des formules faciles à calculer, il sera commode de considérer ici des fonctions

$f(t)$ satisfaisant des conditions particulières.

3.1. Fonctions à matrice de transition fixe

3.1 Définition *On dit que le vecteur $f(t) = [f_1(t), ..., f_n(t)]'$, $t \in \mathbb{Z}$, est à matrice de transition fixe s'il existe une matrice A telle que $f(t) = Af(t-1), \forall t \in \mathbb{Z}$.*

Si $f(t) = Af(t-1)$, alors

$$\varphi(t) = f(t)' a = f(t-1)' A' a \, .$$

On peut obtenir la plupart des tendances usuelles à partir de fonctions $f(t)$ à matrice de transition fixe.

a) Fonction constante

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= a_1 \\ \text{si } f(t) &= 1, \quad A = 1 \, . \end{aligned}$$

b) Fonction linéaire

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= a_1 + a_2 t = f(t)' a \\ \text{si } f(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ f(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t-1 \end{bmatrix} = Af(t-1) \, . \end{aligned}$$

c) Polynôme de degré m

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j = f(t)' a \\ f(t) &= [f_1(t), f_2(t), ..., f_{m+1}(t)]' \\ f_1(t) &= 1, \; f_2(t) = t, \; f_3(t) = t(t-1)/2 \, , \\ f_4(t) &= t(t-1)(t-2)/3! \, , \\ &\vdots \\ f_{m+1}(t) &= t(t-1)...(t-m+1)/m! \, . \end{aligned}$$

On a

$$f_k(t) = f_{k-1}(t-1) + f_k(t-1), \quad \forall k \geq 2 \, ,$$

car

$$
\begin{aligned}
f_{k-1}(t-1)+f_k(t-1) &= \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-k+2)}{(k-2)!} \\
&\quad + \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-k+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-k+2)}{(k-2)!}\left[1+\frac{(t-k+1)}{k-1}\right] \\
&= \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-k+2)}{(k-2)!}\left[\frac{t}{k-1}\right] \\
&= f_k(t)\ .
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= Af(t-1)\ , \\
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}\ .
\end{aligned}
$$

d) Fonctions sinusoïdales

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= a\sin(\omega t)+a_2\cos(\omega t) \\
f(t) &= \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \sin[\omega(t-1)] \\ \cos[\omega(t-1)] \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}\ .
\end{aligned}
$$

e) Fonction exponentielle

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= ae^{\alpha t} \\
f(t) &= e^{\alpha t} = e^{\alpha}e^{\alpha(t-1)} = Af(t-1) \\
A &= e^{\alpha}
\end{aligned}
$$

3.2. Description de la méthode

Cherchons a qui minimise $S(a)$ en (3.1). Soit

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} X_T \\ \vdots \\ X_1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} f(0)' \\ f(-1)' \\ f(-T+1)' \end{bmatrix} \\ \Omega &= diag\left(1, 1/\beta, 1/\beta^2, ..., 1/\beta^{T-1}\right)\ . \end{aligned}$$

La valeur $\hat{a}(T)$ qui minimise

$$S(a) = (y - Fa)'\Omega(y - Fa) \tag{3.1}$$

est donc

$$\begin{aligned} \hat{a}(T) &= \left[F'\Omega^{-1}F\right]^{-1} F'\Omega^{-1}y \\ &= M(T)^{-1} Z(T) \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$M(T) = F^1\Omega^{-1}F = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j f(-j)\, f(-j)'\ , \tag{3.3}$$

$$Z(T) = F'\Omega^{-1}y = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j f(-j)\, X_{T-j}\ .$$

Comme $0 < \beta < 1$, on peut trouver dans la plupart des cas une matrice M telle que

$$M = \lim_{T\to\infty} M(T)\ .$$

Remplaçons $M(T)$ par la limite M :

$$\hat{a}(T) = M^{-1}Z(T)\ . \tag{3.4}$$

La prévision de X_{T+h} est alors

$$\hat{X}_T(h) = f(h)'\,\hat{a}(T)\ . \tag{3.5}$$

La formule de mise à jour de $\hat{a}(T)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
Z(T) &= \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} f(-j) \\
&= X_T f(0) + \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} f(-j) \\
&= X_T f(0) + \beta \sum_{j=0}^{T-2} \beta^j X_{T-j-1} f(-j-1) \\
&= X_T f(0) + \beta A^{-1} \sum_{j=0}^{T-2} \beta^j X_{T-j-1} f(-j) \\
&= X_T f(0) + \beta A^{-1} Z(T-1)
\end{aligned}$$

où $f(-j) = Af(-j-1)$,

$$\begin{aligned}
\hat{a}(T) &= X_T M^{-1} f(0) + \beta M^{-1} A^{-1} M \hat{a}(T-1) \\
&= gX_T + G\hat{a}(T-1) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
g &= M^{-1} f(0) \ , \\
G &= \beta M^{-1} A^{-1} M \ .
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
A^{-1}M &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j A^{-1} f(-j) \left[A^{-1} f(-j)\right]' A' \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j f(-j-1) \left[f(-j-1)\right]' A' \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k-1} f(-k) f(-k)'\right] A' \ , \\
G &= \beta M^{-1} A^{-1} M = M^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k f(-k) f(-k)'\right] A' \\
&= M^{-1} \left[M - f(0) f(0)'\right] A' = \left[I - M^{-1} f(0) f(0)'\right] A'
\end{aligned}$$

$$= \left[A' - gf(1)'\right] ,$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \hat{a}(T) &= gX_T + \left[A' - gf(1)'\right]\hat{a}(T-1) \\ &= gX_T + A'\hat{a}(T-1) - gf(1)'\hat{a}(T-1) , \end{aligned}$$

d'où la formule de mise à jour

$$\hat{a}(T) = A'\hat{a}(T-1) + g\left[X_T - \hat{X}_{T-1}(1)\right] . \tag{3.7}$$

4. Méthode de Holt-Winters

Holt et Winters ont proposé une approche un peu différente au problème du lissage exponentiel.

4.1. Méthode non saisonnière

Holt et Winters ajustent aussi une droite au voisinage de T (comme dans le lissage exponentiel double). Les formules de mise à jour des coefficients sont toutefois différentes :

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(T) &= (1-\alpha)X_T + \alpha\left[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\right] \\ &= (1-\alpha)X_T + \alpha\hat{X}_{T-1}(1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned} \hat{a}_2(T) &= (1-\gamma)\left[\hat{a}_1(T) + \hat{a}_1(T-1)\right] + \gamma\hat{a}_2(T-1) \\ &= \hat{a}_2(T-1) \\ &\quad + (1-\gamma)\left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1) - \hat{a}_2(T-1)\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $0 < \gamma < 1$. Ces deux formules sont des moyennes pondérées.

Les prévisions associées sont :

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_1(T) + h\hat{a}_2(T) . \tag{4.3}$$

On prend habituellement :

$$\hat{a}_1(2) = X_2, \quad \hat{a}_2(2) = X_2 - X_1 .$$

Les formules de mise à jour du lissage exponentiel double peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1(T) &= \left(1-\beta^2\right) X_T + \beta^2 \left[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\right] \ , \\
\hat{a}_2(T) &= \hat{a}_2(T-1) + \frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2} \left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1) - \hat{a}_2(T-1)\right] \ .
\end{aligned}$$

Les deux méthodes sont identiques si on prend

$$\alpha = \beta^2,\ \gamma = 1 - \frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2} = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \ .$$

On a plus de flexibilité, mais on doit choisir deux constantes.

4.2. Méthodes saisonnières additives

On suppose que la série peut être approximée au voisinage de T par

$$a_1 + (t-T)\, a_2 + S_t$$

où S_t est un facteur saisonnier. Prenant

$$\begin{array}{ll}
s = 4 & \text{pour des données trimestrielles,} \\
s = 12 & \text{pour des données mensuelles,}
\end{array}$$

on propose les formules suivantes de mise à jour :

$$\hat{a}_1(T) = (1-\alpha)\left(X_T - \hat{S}_{T-s}\right) + \alpha \left[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\right], \tag{4.1}$$

$$\hat{a}_2(T) = (1-\gamma)\left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)\right] + \gamma \hat{a}_2(T-1), \tag{4.5}$$

$$\hat{S}_T = (1-\delta)\left[X_T - \hat{a}_1(T)\right] + \delta \hat{S}_{T-s}, \tag{4.6}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < 1$ et $0 < \delta < 1$, d'où la prévision

$$\begin{aligned}
\hat{X}_T(h) &= \hat{a}_1(T) + h\hat{a}_2(T) + \hat{S}_{T+h-s}, \quad \text{si} \quad 1 \leq h \leq s \ , \\
&= \hat{a}_1(T) + h\hat{a}_2(T) + \hat{S}_{T+h-2s}, \quad \text{si} \quad s < h \leq 2s \ .
\end{aligned}$$

Des valeurs initiales sont nécessaires. Pour $s = 4$, on peut prendre :

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1(3) &= \frac{1}{8}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{1}{8}X_5 \ , \\
\hat{a}_1(4) &= \frac{1}{8}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{1}{4}X_5 + \frac{1}{8}X_6 \ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_2(4) &= \hat{a}_1(4) - \hat{a}_1(3) \ , \\
\hat{S}_4 &= X_4 - \hat{a}_1(4) \ , \\
\hat{S}_3 &= X_3 - \hat{a}_1(3) \ , \\
\hat{S}_2 &= X_2 - \hat{a}_1(3) + \hat{a}_2(4) \ , \\
\hat{S}_1 &= X_1 - \hat{a}_1(3) + 2\hat{a}_2(4) \ .
\end{aligned}
$$

4.3. Méthode saisonnière multiplicative

On cherche à approximer X_t par une tendance de la forme $[a_1 + (t-T)\,a_2]\,S_t$. Les formules de mise à jour sont :

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_1(T) &= (1-\alpha)\frac{X_T}{\hat{S}_{T-s}} + \alpha\left[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\right], \quad 0 < \alpha < 1 \ , \\
\hat{a}_2(T) &= \gamma\hat{a}_2(T-1) + (1-\gamma)\left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)\right], \quad 0 < \gamma < 1 \ , \\
\hat{S}_T &= \delta\hat{S}_{T-s} + (1-\delta)\frac{X_T}{\hat{a}_1(T)}, \quad 0 < \delta < 1 \ ,
\end{aligned}
$$

d'où la prévision

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_T(h) &= \left[\hat{a}_1(T) + h\hat{a}_2(T)\right]\hat{S}_{T+h-s}, \quad 1 \le h \le s \ , \\
&= \left[\hat{a}_1(T) + h\hat{a}_2(T)\right]\hat{S}_{T+h-2s}, \quad s < h \le 2s \ .
\end{aligned}
$$

Valeurs initiales pour $s = 4$:

$\hat{a}_1(3)$, $\hat{a}_1(4)$, $\hat{a}_2(4)$: mêmes valeurs que pour la méthode additive saisonnière ;

$\hat{S}_1,\ \hat{S}_2,\ \hat{S}_3,\ \hat{S}_4$: on divise les observations par la tendance linéaire calculée à partir de $\hat{a}_1(4)$ et $\hat{a}_2(4)$.

5. Notes bibliographiques

Voir Gouriéroux et Monfort (1983, Chap. II).

Références

Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1983), *Cours de séries temporelles*, Economica, Paris.