RAPPELS MATHÉMATIQUES
PROPRIÉTÉS DES MOMENTS DE VARIABLES ALÉATOIRES

Jean-Marie Dufour

Mai 1995

Soient X et Y des variables aléatoires réelles et soient r et s des nombres réels positifs ($r > 0$, $s > 0$). Alors on a les propriétés suivantes.

1. $E(|X|)$ existe toujours dans les nombres réels étendus $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ et $E(|X|) \in [0,\infty]$; i.e. $E(|X|)$ est un nombre réel non négatif ou $E(|X|) = \infty$.
2. $E(X)$ existe et est fini $\Leftrightarrow E(|X|) < \infty$.
3. $E(|X|) < \infty \Rightarrow |E(X)| \leq E(|X|) < \infty$.
4. Si $0 < r \leq s$, alors
   $E(|X|^s) < \infty \Rightarrow E(|X|^r) < \infty$.
5. $L_s \subseteq L_r$ pour $0 < s \leq r$.
6. $E(|X|^r) < \infty \Rightarrow E(X^k)$ existe et est fini pour tout entier k tel que $0 < k \leq r$.
7. *Inégalité c_r*. $E(|X + Y|^r) \leq c_r[E(|X|^r) + E(|Y|^r)]$, où
   $c_r = 1$, si $0 < r \leq 1$,
   $= 2^{r-1}$, si $r > 1$.
8. Soient a et b des nombres réels. Alors
   $X \in L_r$ et $Y \in L_r \Rightarrow aX + bY \in L_r$.
9. *Inégalité de Hölder*. Si $r > 1$ et $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$, alors
   $E(|XY|) \leq [E(|X|^r)]^{1/r}[E(|Y|^s)]^{1/s}$.
10. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*.
    $E(|XY|) \leq [E(X^2)]^{1/2}[E(Y^2)]^{1/2}$.
11. *Inégalité de Minkowski*. Si $r \geq 1$, alors
    $E(|X + Y|^r)^{1/r} \leq [E(|X|^r)]^{1/r} + [E(|Y|^r)]^{1/r}$.
12. $[E(|X|^r)]^{1/r}$ est une fonction non décroissante de r, i.e.
    $0 < r \leq s \Rightarrow [E(|X|^r)]^{1/r} \leq [E(|X|^s)]^{1/s}$.
13. *Théorème de Liapounov*. $\log[E(|X|^r)]$ est une fonction convexe de r, i.e. pour tout $\lambda \in [0, 1]$,
    $\log[E(|X|^{\lambda r+(1-\lambda)s})] \leq \lambda \log[E(|X|^r)] + (1 - \lambda) \log[E(|X|^s)]$.
14. *Inégalité de Jensen*. Si $g(x)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et $E(|X|) < \infty$, alors, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$,
    $g(c) \leq E[g(X - EX + c)]$
    et, en particulier,
    $g(EX) \leq E[g(X)]$.
15. *Inégalités de Markov*. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(X)$ est une v.a. réelle, $E(|g(X)|) < \infty$ et
    $P[0 \leq g(X) \leq M] = 1$,
    où $M \in [0,\infty]$. Si $g(x)$ est une fonction non décroissante sur $[0,\infty)$ et $g(x) = g(-x)$ pour tout x, alors, pour tout $a \geq 0$,
    $$\frac{E[g(X)] - g(a)}{M} \leq P[|X| \geq a] \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)},$$

où $0/0 \equiv 1$. Si $g(x)$ est une fonction non décroissante sur ℝ, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{E\left[g\left(X\right)\right]-g\left(a\right)}{M} \leq P[X \geq a] \leq \frac{E\left[g\left(X\right)\right]}{g\left(a\right)}.$$

16. *Inégalités de Chebyshev*. Si $P[|X| \leq M] = 1$, où $M \in [0,\infty]$, alors, pour tout $a \geq 0$,

$$\frac{E\left(|X|^r\right)-a^r}{M^r} \leq P[|X| \geq a] \leq \frac{E\left(|X|^r\right)}{a^r}.$$

17. *Lien entre l'existence des moments et les probabilités de queue.* Pour tout $r > 0$,

a) $E(|X|^r) = r\int_0^\infty x^{r-1}P(|X| \geq x)dx$,

et

b) si $E(|X|^r) < \infty$, alors $\lim\limits_{x\to\infty}\{x^r P(|X| \geq x)\} = 0$.

En particulier, en prenant $r = 1$, on voit que

c) $E|X| = \int_0^\infty P(|X| \geq x)dx$,

et

d) si $E|X| < \infty$, alors $\lim\limits_{x\to\infty}\{x\, P(|X| \geq x)\} = 0$.

18. Si X est une v.a. positive,

$\Sigma_{n=1}^{\infty}P(X \geq n) \leq E(X) \leq 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty}P(X \geq n)$.

PREUVES ET RÉFÉRENCES

1 à 16. Voir Loève (1977, sections 9.1 et 9.3, 151-162). Pour l'inégalité de Jensen, voir aussi Chow et Teicher (1988, section 4.3, 103-106).

17. Voir Serfling (1980, section 1.14, 46-47).

18. Voir Chung (1974, Theorem 3.2.1) et Serfling (1980, section 1.3, p. 12).

BIBLIOGRAPHIE

Chow, Yuan Shih et Teicher, H. (1988). *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales.* Springer-Verlag, New York.

Chung, K.L. (1974). *A Course in Probability Theory, Second Edition.* Academic Press, New Yok.

Loève, M. (1977). *Probability Theory I, 4th Edition*. Springer-Verlag, New York.

Serfling, Robert J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* John Wiley and Sons, New York.