Jean-Marie Dufour
Janvier 2002
Compilé : 19 janvier 2002

THÉORIE ÉCONOMÉTRIQUE
EXERCICES 9
MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

1. Soit la densité

$$\ell\left(y_1,\, \ldots\, ,\, y_n;\, \theta\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\theta\right)^2\right\} .$$

   (a) Montrez qu'en modifiant cette densité sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, on peut faire en sorte que l'estimateur du maximum de vraisemblance soit égal à $\sum_{i=1}^{n} y_i^4$.

   (b) Est-il possible d'empêcher ce genre de manipulation ? Si oui, comment ?

2. Montrez que, dans un problème de maximisation de la vraisemblance,

   (a) l'estimateur du maximum de vraisemblance peut ne pas exister ;

   (b) il peut exister plusieurs estimateurs du maximum de vraisemblance.

3. Soit $\ell\left(y;\, \theta\right)$, $\theta \in \Theta$, une fonction de vraisemblance telle que

   (a) Θ est un ensemble convexe
   et

   (b) $\log\left[\ell\left(y; \theta\right)\right]$ est une fonction strictement concave en θ.

   Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est unique (s'il existe).

4. Comment se comporte l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsqu'on reparamétrise le modèle ? Justifiez votre réponse.

5. Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} = \left(P_\theta = \ell\left(y;\, \theta\right) \cdot \mu,\ \theta \in \Theta\right)$, un modèle paramétrique dominé. Soit $S\left(y\right)$ une statistique exhaustive pour θ.

   (a) Si $\lambda = g\left(\theta\right)$ est une fonction bijective de θ et si l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}\left(y\right)$ de θ est unique, comment les estimateurs du maximum de vraisemblance de λ et θ sont-ils reliés ? Justifiez votre réponse.

(b) Que se passe-t-il dans le cas où l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ n'est pas unique ?

(c) L'estimateur $\hat{\theta}(y)$ est-il une fonction de $S(y)$? Justifiez votre réponse.

6. Considérez le modèle d'équilibre :

$$\begin{aligned} q_t &= ap_t + b + u_t\,, \\ S_t &= \alpha p_t + \beta x_t + \nu_t\,, \\ q_t &= S_t\,, \end{aligned}$$

où q_t est la quantité demandée, p_t est le prix, S_t est la quantité offerte, x_t est une variable exogène, et les vecteurs $(u_t, \nu_t)'$, $t = 1, \ldots, n$ sont des vecteurs aléatoires indépendants et de même loi

$$N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{u\nu} \\ \sigma_{u\nu} & \sigma_\nu^2 \end{pmatrix}\right].$$

(a) Trouvez la forme réduite de ce modèle.

(b) Comment les paramètres de la forme réduite sont-ils reliés à ceux de la forme structurelle ? Ce modèle est-il sous-identifié, juste identifié ou suridentifié ?

(c) Trouvez les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la forme réduite.

(d) Trouvez les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la forme structurelle.

7. Donnez des conditions de régularité sous lesquelles une suite d'estimateurs du maximum de vraisemblance converge presque sûrement vers la vraie valeur du paramètre.

8. Soient les hypothèses suivantes :

H1 : les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes, de même loi, de densité $f(y;\, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$;

H2 : Θ est d'intérieur non vide et θ_0 appartient à l'intérieur de Θ;

H3 : la vraie valeur inconnue θ_0 est identifiable ;

H4 : la log-vraisemblance

$$L_n(y;\, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left[f(y_i;\, \theta)\right] \text{ est continue en } \theta\,;$$

H5 : $E_{\theta_0}\left[\log f(Y_i;\, \theta)\right]$ existe ;

H6 : la log-vraisemblance est telle que $\frac{1}{n} L_n(y;\, \theta)$ converge presque sûrement vers $E_{\theta_0}[\log(Y_i;\, \theta)]$ uniformément en $\theta \in \Theta$;

H7 : la log-vraisemblance est deux fois continûment dérivable dans un voisinage ouvert de θ_0;

H8 : $I_1(\theta_0) = E_{\theta_0}\left[-\frac{\partial^2 \log f(Y;\, \theta)}{\partial\theta\, \partial\theta'}\right]$ existe et est inversible.

Si $\hat{\theta}_n$ est une suite convergente de maxima locaux, montrez que la distribution asymptotique de $\sqrt{n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big)$ est $N\big[0,\ I_1(\theta_0)^{-1}\big]$.

9. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ un échantillon de variable aléatoires indépendantes de loi $N[\mu,\, \sigma^2]$ où $\mu \neq 0$ et $\sigma > 0$. Trouvez la distribution asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\gamma = 1/\mu$.

10. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ un échantillon de variable aléatoires indépendantes extraites d'une loi exponentielle de densité :

$$f(y;\, \theta) = e^{-(y-\theta)} 1_{y \geq \theta}\,.$$

   (a) Quelle condition de régularité n'est pas vérifiée dans ce problème ?
   (b) Comment se comporte $\sqrt{n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big)$ pour n grand ?
   (c) Trouvez une loi de probabilité asymptotique pour $\hat{\theta}_n$.

11. Soient $\begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$, des vecteurs indépendants de même densité $f(y_i,\, x_i;\, \theta)$. S'il y a coupure entre la densité conditionnelle de Y_i étant donné X_i et la densité marginale de X_i, montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ (s'il existe) peut être obtenu en calculant séparément un estimateur du maximum de vraisemblance conditionnel et un estimateur du maximum de vraisemblance marginal.