Jean-Marie Dufour
Janvier 2002
Compilé : 19 janvier 2002

THÉORIE ÉCONOMÉTRIQUE
EXERCICES 6

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DES TESTS

1. Expliquez les distinctions suivantes :
   (a) test de signification et test de spécification ;
   (b) hypothèse simple et hypothèse composite ;
   (c) problème de test identifiable et problème de test non identifiable ;
   (d) erreur de première espèce et erreur de seconde espèce.
2. On suppose qu'une variable Y_t suit une équation de la forme
$$Y_t = ae^{bt} + c + u_t\,, \quad t = 1, \ldots, T$$
   où a, b, c sont des paramètres inconnus et $u_1, ..., u_T$ sont des varaiables aléatoires *i.i.d.* $N(0, \sigma^2)$.
   (a) Ce modèle est-il identifiable ? Pourquoi ?
   (b) Décidez lesquelles des hypothèses suivantes sont identifiables :
      i. $a = 0$;
      ii. $b = 0$;
      iii. $c = 0$;
      iv. $a = b = 0$;
      v. $b = c = 0$.
   (a) Quand un test est-il *préférable* à un autre test ?
   (b) Montrez qu'il n'existe pas de test *optimal*, sauf dans des cas dégénérés.
3. On considère un jet d'une pièce de monnaie et on note :
$$Y = \begin{cases} 1, \text{ si "pile" est observé} \\ 0, \text{ si "face" est observé} \end{cases} .$$
   On définit $P[Y = 1] = 1$ et on s'intéresse à l'hypothèse nulle $H_0 : p \geq \frac{1}{2}$. Trouvez tous les tests admissibles de H_0. Décrivez un test non admissible.

4. Expliquez la différence entre le principe bayesien et le principe de Neyman pour sélectionner un test.

   (a) Expliquez ce qu'est le *diagramme de risques* pour un test entre deux hypothèses simples.

   (b) Qu'est-ce qu'un *test de Neyman* ?

5. Énoncez et démontrez le *théorème de Neyman-Pearson*.

6. Considérez le modèle paramétrique $(\Upsilon, (P_\theta;\ \theta \in \Theta))$ où Θ est un intervalle dans $\mathbb{R}$.

   (a) Quand la famille $(P_\theta;\ \theta \in \Theta)$ est-elle à rapport de densités monotone ?

   (b) Dans le cas où la famille $(P_\theta; \theta \in \Theta)$ est à rapport de densités croissant, donnez un test uniformément plus puissant au seuil α pour tester $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$.

7. Considérez un modèle exponentiel uniparamétrique dont les densités sont

$$\ell\,(y;\,\theta) = C\,(\theta)\,h\,(y)\exp\left[Q\,(\theta)\,T\,(y)\right]$$

   où $Q\,(\theta)$ est une fonction strictement croissante de $\theta \in \mathbb{R}$.

   (a) Trouvez un test uniformément plus puissant au seuil α pour tester $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$.

   (b) Trouvez un test localement plus puissant au seuil α pour tester $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$. [Si une condition de différentiabilité est requise, précisez cette dernière.]

   (c) Donnez un test uniformément plus puissant au seuil α pour tester $H_0 : \theta \leq \theta_1$ ou $\theta \geq \theta_2$ contre $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$, où $\theta_1 < \theta_2$.