Analyse complexe et séries entières *

Jean-Marie Dufour †

Première version: Mars 1992
Révisions: Janvier 2002
Cette version: 21 janvier 2003
Compilé: 21 janvier 2003, 10:04am

*Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS) et du Fonds FCAR du Québec.

† L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

1. Fonctions analytiques

1.1 NOTATION. Dans ce texte, à moins d'avis contraire, z désigne un nombre complexe ($z \in \mathbb{C}$), tandis que f et g désignent des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ et $g : F \to \mathbb{C}$, où $B(a\,;\bar{\delta}) \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$, $B\left(a;\bar{\delta}\right) \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$, $B\left(a;\bar{\delta}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \bar{\delta}\right\}$, $0 < \bar{\delta} \leq \infty$ et $a \in \mathbb{C}$. En d'autres termes, f et g sont des fonctions à valeurs complexes dont les domaines sont des sous-ensembles E et F des complexes contenant une boule ouverte centrée au point a.

1.2 DÉFINITION : Limite d'une fonction complexe. Soit $b \in \mathbb{C}$. On dit que $f\,(z)$ converge vers b lorsque z tend vers a, ce qu'on note

$$\lim_{z \to a} f(z) = b\ ,$$

si on a la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|z-a| < \delta \text{ et } z \neq a \Rightarrow |f\,(z) - b| < \varepsilon\ .$$

1.3 DÉFINITION : Limites à droite et à gauche. Soient $b \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{C}$, où $B\left(a;\bar{\delta}\right) \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f\,(x)$ converge vers b lorsque x tend vers a par la gauche, ce qu'on note

$$\lim_{x \to 1^-} f\,(x) = b \ \text{ ou } f\,(x-) = b\ ,$$

si on a propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta \ \text{ et } x < a \Rightarrow |f\,(x) - b| < \varepsilon\ .$$

De même, on dit que $f\,(x)$ converge vers b lorsque x tend vers a par la droite, ce qu'on note

$$\lim_{x \to 1^+} f\,(x) = b \text{ ou } f\,(x+) = b\ ,$$

si on a propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta \text{ et } x > a \Rightarrow |f\,(x) - b| < \varepsilon\ .$$

1.4 DÉFINITION : Fonction continue. On dit que la fonction f est *continue* au point a ssi

$$\lim_{z \to a} f\,(z) = f\,(a)\ \ .$$

1.5 DÉFINITION : Dérivée d'une fonction complexe. On dit que la fonction f est *différentiable* au point a s'il existe un nombre $f'(a) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \ .$$

On appelle $f'(a)$ la *dérivée* de $f(z)$ en a.

REMARQUE : On dénote aussi $f'(z)$ par $\frac{d}{dz} f(z)$.

1.6 PROPOSITION : Continuité des fonctions différentiables. Si la fonction f est différentiable au point a, alors elle est continue au point a.

1.7 THÉORÈME : Propriétés de la dérivation. Soit $z \in B\left(a; \bar{\delta}\right) \subseteq E \cap F$. Si les fonctions f et g sont différentiables au point z, alors

(1) $\frac{d}{dz}\left[c\, f(z)\right] = c\, f'(z)$,

(2) $\frac{d}{dz}\left[f(z) + g(z)\right] = f'(z) + g'(z)$,

(3) $\frac{d}{dz}\left[f(z)\, g(z)\right] = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z)$,

(4) $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{g(z)^2}$, pourvu que $g(z) \neq 0$.

1.8 THÉORÈME : Règle de chaîne. Soit $h : G \to \mathbb{C}$ où $B(f(a);\, \delta_0) \subseteq f(E) \subseteq G \subseteq \mathbb{C}$, $B(f(a);\, \delta_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - f(a)| < \delta_0\}$ et $0 < \delta_0 \leq \infty$. Si la fonction f est différentiable au point a et si h est différentiable au point $f(a)$, alors la fonction composée $H(z) = h[f(z)]$ est différentiable au point a et

$$H'(a) = h'[f(a)]\, f'(a) \ .$$

1.9 THÉORÈME : Dérivées de fonctions importantes.

(1) Si c est une constante complexe, alors

$$\frac{d}{dz}(c) = 0 \ .$$

(2) Si n est une constante réelle,

$$\frac{d}{dz}(z^n) = n\, z^{n-1}, \text{ pourvu que } z \neq 0 \text{ lorsque } n < 1 \ .$$

(3) $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.

1.10 THÉORÈME : Dérivée d'une fonction réelle d'une variable complexe. Supposons que la fonction f ne prend que des valeurs réelles à tous les points de la boule ouverte

$B\left(a;\bar{\delta}\right)$, *i.e.* $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in B\left(a;\ \bar{\delta}\right)$. Si f est différentiable au point a, alors $f'(a) = 0$.

1.11 DÉFINITION : Fonction analytique. S'il existe une constante positive $\varepsilon > 0$ telle que la fonction f est différentiable à tous les points z tels que $|z - a| < \varepsilon$, on dit que la fonction est *analytique* au point a. Si la fonction f est analytique en tout point d'un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, on dit que f est analytique sur le domaine D.

REMARQUE : On appelle aussi une fonction analytique fonction *holomorphe*.

1.12 DÉFINITION : Point singulier. Si une fonction f n'est pas analytique en un point z_0, mais pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point z_1 tel que $|z_1 - z_0| < \varepsilon$ et f est analytique en z_1, on dit que z_0 est un *point singulier* de la fonction f. Si, de plus, il existe un rayon $R > 0$ tel que f est analytique sur le disque $0 < |z - z_0| < R$, on dit que z_0 est un *point singulier isolé* de la fonction f.

1.13 THÉORÈME : Opération sur des fonctions analytiques. Si les fonctions f et g sont analytiques au point a, alors

(1) les fonctions $f(z) + g(z)$ et $f(z)\, g(z)$ sont analytiques au point a ;

(2) la fonction $f(z)/g(z)$ est analytique au point a pourvu que $g(a) \neq 0$.

1.14 THÉORÈME : Composition de fonctions analytiques. Soit $h : G \to \mathbb{C}$ où $B(f(a);\, \delta_0) \subseteq f(E) \subseteq G \subseteq \mathbb{C}$, $B(f(a);\, \delta_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - f(a)| < \delta_0\}$ et $0 < \delta_0 \leq \infty$. Si la fonction f est analytique au point a et si h est analytique au point $f(a)$, alors la fonction composée $(h \circ f)(z) = h[f(z)]$ est analytique au point a.

1.15 THÉORÈME : Différentiabilité à tout ordre des fonctions analytiques. Si la fonction f est analytique au point $a \in \mathbb{C}$, alors f possède des dérivées de tous ordres en a et les fonctions dérivées sont aussi analytiques au point a.

1.16 THÉORÈME : Fonctions analytiques importantes.

(1) Tout polynôme de degré n,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{1.1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, est analytique en tout point z.

(2) Toute fonction rationnelle

$$f(z) = P(z)/Q(z) \tag{1.2}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes de degré p et q, est analytique partout, sauf lorsque $Q(z) = 0$.

(3) Les fonctions $e^z, \cos(z)$ et $\sin(z)$ sont analytiques partout.

(4) La fonction $\log(z)$ est analytique partout sauf à $z = 0$.

2. Séries entières

2.1 DÉFINITION : Série entière. Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On appelle la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une *série entière* centrée à z_0. Les nombres a_n sont les *coefficients* de la série.

REMARQUE : Dans cette définition et par la suite, nous utiliserons la convention $0^0 = 1$.

2.2 THÉORÈME : Rayon de convergence d'une série entière (Abel-Hadamard). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ une série entière et

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}, R = 1/\alpha ,$$

où $R = \infty$ lorsque $\alpha = 0$, et $R = 0$ lorsque $\alpha = \infty$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolument si $|z - z_0| < R$ et diverge si $|z - z_0| > R$. De plus, si $0 \leq \rho < R$, la convergence est uniforme pour $|z - z_0| \leq \rho$.

REMARQUE : On appelle R le *rayon de convergence* de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. L'expression $1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ est la *formule d'Hadamard* pour le rayon de convergence.

2.3 COROLLAIRE : Si la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge pour $z = z_1$, où $z_1 \neq z_0$, alors elle converge absolument pour tout z tel que $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

2.4 COROLLAIRE : Bornes sur les coefficients d'une série entière. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R, et soit $\varepsilon > 0$.

(1) Si $0 < R \leq \infty$, il existe un entier N, tel que $|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n$ pour $n > N$.

(2) Si $0 < R < \infty$, il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles $|a_n| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^n$.

(3) Si $R = 0$, il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles $|a_n| > \varepsilon^n$.

2.5 THÉORÈME : Si la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolument pour $z = z_1$, où $z_1 \neq z_0$, alors elle converge absolument et uniformément sur le disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq |z_1 - z_0|\}$.

2.6 PROPOSITION : Rayon de convergence et critère du ratio. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

De plus, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ existe ou $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \infty$, $R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$.

2.7 THÉORÈME : Condition de convergence sur le cercle unité. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est 1. Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels telle que

(a) $a_{n+1} \leq a_n, \forall n$, et
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$, sauf possiblement à $z = 1$.

2.8 THÉORÈME (Abel). Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $|z| < 1$, tend vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ lorsque $z \to 1$ d'une façon telle que $|1 - z| / (1 - |z|)$ demeure borné.

2.9 COROLLAIRE : Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, et si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$, où $x \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ existe et

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

REMARQUE : Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne converge pas, la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ peut exister ou ne pas exister. En général, l'existence de la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ne garantit pas la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Il y a toutefois des cas où l'existence de la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ implique la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (*théorèmes Taubériens*). Le théorème suivant en est un exemple.

2.10 THÉORÈME (Tauber). Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$, où $x \in \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$ et si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ existe, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2.11 THÉORÈME : Unicité des coefficients d'une série entière. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ sont deux séries entières convergentes pour $|z - z_0| < R$, où $R > 0$, et si les limites de ces séries coïncident sur une suite de points $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ tels que $0 < |z_k| < R$, $\forall k$, et $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$, alors

$$a_n = b_n \ , \quad \forall n \ .$$

2.12 COROLLAIRE. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ sont deux séries entières convergentes pour $|z - z_0| < R$, où $R > 0$, et si les limites de ces séries coïncident pour tout z dans le cercle $|z - z_0| < R$, alors

$$a_n = b_n \ , \quad \forall n \ .$$

2.13 THÉORÈME : Différentiabilité d'une série entière. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < R$, où $R > 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est une série entière dont le rayon de convergence est R. Alors la fonction $f(z)$ est analytique (et donc différentiable) sur le disque $|z - z_0| < R$, et

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$$

où la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n (z - z_0)^{n-1}$ a pour rayon de convergence R. Si, de plus, $0 < R < \infty$ et $f(z)$ est une fonction telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ partout où la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge, alors il y a au moins un point sur le cercle $|z - z_0| = R$ où la fonction $f(z)$ n'est pas analytique.

REMARQUE : En d'autres termes, on peut obtenir la dérivée de la fonction $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en différentiant la série terme à terme, et la série dérivée a le même rayon de convergence que la série originale.

2.14 COROLLAIRE. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < R$, où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est une série entière dont le rayon de convergence est R. Alors la fonction $f(z)$ possède des dérivées de tous ordres et ces dérivées peuvent être obtenues en différentiant la série terme à terme. Les séries dérivées ont toutes le même rayon de convergence R et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, ...$$

où $f^{(n)}(z)$ est la dérivée d'ordre n de $f(z)$.

2.15 THÉORÈME : Intégrabilité d'une série entière. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R, soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < R$, soit C un contour (courbe continue) situé à l'intérieur du cercle de convergence $|z - z_0| < R$, et soit $g(z)$ une fonction continue sur C. Alors

$$\int_C f(z)\, g(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)\,(z - z_0)^n\, dz\ .$$

2.16 DÉFINITION : Série entière bilatérale. Soient $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On appelle *série entière bilatérale* une série bilatérale de la forme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Cette série *converge* lorsque les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ convergent. Autrement, on dit qu'elle *diverge*.

2.17 PROPOSITION : Anneau de convergence d'une série bilatérale. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^n$ des séries entières dont les rayons de convergence sont R_1 et R_2 respectivement, où $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$.

(1) Si $1/R_2 < R_1$, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge pour $1/R_2 < |z - z_0| < R_1$ et diverge lorsque $|z - z_0| > R_1$ ou $|z - z_0| < 1/R_2$.

(2) Si $R_1 < 1/R_2$, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ diverge partout.

(3) Si $R_1 = 1/R_2$, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverge partout sauf possiblement sur le cercle $|z - z_0| = R_1$.

3. Séries de Taylor et de Laurent

3.1 THÉORÈME : Série de Taylor dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique en tout point du disque ouvert

$$D = \{y \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \text{ , où } z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < R \leq \infty \, .$$

Alors il existe une suite unique $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \ \forall z \in D \, .$$

De plus,

$$a_n = f^{(n)} (z_0) / n! = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \ , \ n = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots$$

où $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ et ρ est un rayon quelconque tel que $0 < \rho < R$.

REMARQUE : En d'autres termes, une fonction analytique à l'intérieur d'un cercle centré à z_0 peut s'écrire à l'intérieur de ce cercle comme une série entière en $(z - z_0)$. De plus, cette série est unique. L'intégrale $\int_C$ est évaluée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

3.2 COROLLAIRE : Inégalités de Cauchy. Sous les conditions du théorème 3.1, supposons en outre que $|f(z)| \leq M$ pour $z \in C(\rho)$, où $C(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ et $0 < \rho < R$. Alors

$$|a_n| = |f^n (z_0)| / n! \leq M/\rho^n, n = 0, 1, 2, \ \ldots \, .$$

REMARQUE : Les inégalités de Cauchy montrent que, si $\rho < 1$, les coefficients d'une série de Taylor doivent décliner à un rythme exponentiel qui dépend du rayon de convergence.

3.3 COROLLAIRE : Équivalence entre le caractère analytique d'une fonction et l'existence d'une série de Taylor. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 < R \leq \infty$.

Alors une fonction f est analytique sur le domaine D ssi il existe une suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ unique dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \forall z \in D .$$

3.4 THÉORÈME : Zéros d'une fonction analytique. Soit f une fonction analytique au point z_0, telle que $f(z_0) = 0$. Si $f^{(n)}(z_0) = 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, mais $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, où $m \geq 1$, alors il existe un rayon $R > 0$ tel que la fonction f peut s'écrire

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

pour $|z - z_0| < R$, où la fonction $g(z)$ est analytique en z_0, et $g(z) \neq 0$ pour $|z - z_0| < R$. Si $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n = 1$, 2, ... , alors il existe un rayon $R > 0$ tel que $f(z) = 0$ pour $|z - z_0| < R$.

REMARQUE : Le théorème précédent implique que les zéros d'une fonction analytique qui n'est pas identiquement nulle sont *isolés* : à moins que toutes les dérivées de f soient nulles, on peut trouver un rayon $R > 0$ tel que z_0 est le seul point où la fonction s'annule dans le disque $|z - z_0| < R$. On appelle z_0 une *racine* de la fonction f et m sa *multiplicité*.

3.5 THÉORÈME : Factorisation d'une fonction analytique. Soit f une fonction analytique sur un domaine ouvert et convexe $U \subseteq \mathbb{C}$. Si la fonction f possède seulement un nombre fini p de racines distinctes $z_1,\ \ldots,\ z_p$, alors la fonction f peut s'écrire

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_p)^{m_p} g(z) , z \in U$$

où m_1, ... , m_p sont les multiplicités des racines $z_1,\ \ldots,\ z_p$ et $g(z)$ est une fonction analytique sur U telle que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

REMARQUE : En d'autres termes, une fonction analytique dont le nombre de racines est fini peut s'écrire comme le produit d'une polynôme qui possède les mêmes racines et d'une fonction analytique qui est toujours différente de zéro. Tout disque ouvert $C = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq (z - z_0) < R\}$ où $R > 0$ est une ensemble convexe. Le dernier théorème demeure valide lorsque U est un ensemble ouvert et connexe.

3.6 THÉORÈME : Règle de simplification. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble ouvert et convexe. Si f et g sont deux fonctions analytiques sur U telles que

$$f(z) g(z) = 0 , \quad \forall z \in U ,$$

alors $f(z) = 0$, $\forall z \in U$, ou $g(z) = 0$, $\forall z \in U$.

REMARQUE : Si f, g et h sont trois fonctions analytiques sur U telles que $f(z)\,h(z) = g(z)\,h(z)$, $\forall z \in U$, et si $h(z) \neq 0$ pour au moins une valeur de $z \in U$, alors

$$[f(z) - g(z)]\,h(z) = 0$$

et on peut conclure que $f(z) = g(z)\,, \forall z \in U$.

3.7 THÉORÈME : Soit f une fonction analytique et non constante sur un ensemble ouvert et convexe U. Alors, pour $w \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$, il existe un rayon $R > 0$ tel que $f(z) \neq w$ pour $0 < (z - z_0) < R$.

REMARQUE : En d'autres termes, si la fonction n'est pas constante, on peut trouver un rayon $R > 0$ tel que $f(z)$ prend la valeur w au plus une fois dans le disque $0 \leq |z - z_0| < R$.

3.8 THÉORÈME : Série de Laurent. Soient C_0 et C_1 deux cercles centrés à z_0 tels que C_0 est contenu dans C_1, $i.e.$

$$C_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R_0\}\,, C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R_1\} \text{ où } 0 \leq R_0 < R_1 \leq \infty\ .$$

Soit f une fonction analytique sur C_0 et C_1 de même que sur le domaine entre ces deux cercles. Alors il existe une suite bilatérale unique $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout z tel que $R_0 < |z - z_0| < R_1$, où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}\ , \text{ for } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}\ , \text{ for } n = -1,\ -2,\ \ldots\ . \end{aligned}$$

De plus, pour tout cercle $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ où $R_0 < R < R_1$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}\ ,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\ .$$

REMARQUE : Les intégrales lignes $\int\limits_{C_0}$, $\int\limits_{C_1}$ et $\int\limits_{C}$ sont évaluées dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

3.9 COROLLAIRE : Série de Laurent dans le voisinage d'un point singulier isolé. Si f est une fonction analytique en tout point du disque $|z - z_0| < R$, où $R > 0$, sauf possiblement à z_0, alors il existe une suite bilatérale unique $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout z tel que $0 < |z - z_0| < R$.

REMARQUE : En d'autres termes, si z_0 est un point singulier isolé de la fonction f, la fonction f peut être représentée par une série de Laurent dans le disque $0 < |z - z_0| < R$. Si, de plus, $a_n = 0$ pour $n < 0$, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor et on peut redéfinir la fonction f à z_0 d'une façon telle que celle-ci devienne analytique en z_0 et donc partout dans le disque $0 \leq |z - z_0| < R$. Dans un tel cas, on dit que le point singulier z_0 est éliminable. Lorsqu'une fonction f est analytique en tout point du disque $|z - z_0| < R$, il est clair qu'on doit avoir $a_n = 0$ pour $n < 0$.

3.10 COROLLAIRE : Inégalités de Cauchy généralisées. Sous les conditions du théorème 3.8, supposons en outre que $|f(z)| \leq M$ pour $z \in C(R)$, où $C(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ et $R_0 < R < R_1$. Alors

$$|a_n| \leq M/R^n\ ,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\ .$$

3.11 DÉFINITION : Parties principale et régulière d'une série de Laurent. Dans une série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, on appelle la série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ formée par les termes correspondant aux puissances négatives de $(z - z_0)$ la *partie principale* de la série, tandis que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est appelée la *partie régulière* de la série.

4. Sommes, produits et ratios de séries entières

4.1 THÉORÈME : Convergence ponctuelle. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ deux séries entières convergentes dont les limites sont $f(z)$ et $g(z)$ respectivement en un point donné z. Alors

(1) $c\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n (z - z_0)^n\, , \forall c \in \mathbb{C}$;

(2) $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$;

(3) si $f(z)$ ou $g(z)$ converge absolument,

$$f(z)\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{4.1}$$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$; de plus, si les deux séries $f(z)$ et $g(z)$ convergent absolument, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge absolument ;

(4) si $b_0 \neq 0$, si la série $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$, où les coefficients d_n sont obtenus en résolvant les équations $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_n, n = 0,\ 1,\ \ldots$, converge, si $g(z)$ ou $h(z)$ converge absolument et si $g(z) \neq 0$,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \ . \tag{4.2}$$

4.2 THÉORÈME : Convergence dans un cercle. Soients $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = g(z)$ deux séries entières dont les rayons de convergence sont R_1 et R_2 respectivement, où $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$. Alors

(1) pour tout $c \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n (z - z_0)^n$ converge absolument pour $|z - z_0| < R_1$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n (z - z_0)^n = c\, f(z) \text{ pour } |z - z_0| < R_1 \,; \tag{4.3}$$

(2) la série $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$ converge absolument pour $|z - z_0| < \min\{R_1, R_2\}$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n = f(z) + g(z) \text{ pour } |z - z_0| < \min\{R_1, R_2\} \ ; \tag{4.4}$$

(3) la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ converge absolument pour $|z - z_0| < \min\{R_1, R_2\}$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z)\, g(z) \, , \text{ pour } |z - z_0| < \min\{R_1,\ R_2\} \, ; \tag{4.5}$$

(4) si $g(z) \neq 0$ pour $|z - z_0| < R$, où $0 < R \leq \min\{R_1, R_2\}$, et si on définit $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ comme la suite de coefficients obtenus en résolvant les équations $\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k} = a_n$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$ converge absolument pour $|z - z_0| < R$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = f(z) / g(z) \tag{4.6}$$

pour $|z - z_0| < R$; lorsque $g(z_0) = b_0 \neq 0$, les coefficients d_n sont déterminés de façon unique et il existe toujours un rayon $R > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour $|z - z_0| < R$.

4.3 THÉORÈME : Série de MacLaurin d'une fonction rationnelle. Si $f(z) = P(z)/Q(z)$ où $P(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n$ et $Q(z) = \sum_{n=0}^{q} a_n z^n$ sont des polynômes de degrés p et q respectivement, et si $Q(0) \neq 0$, alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \text{ pour } |z| < R\,,$$

où $R = \min\left\{|z_1^*|, \ldots, \left|z_q^*\right|\right\} > 0$, $z_1^*, \ldots, z_q^*$ sont les racines (possiblement non distinctes) du polynôme $Q(z)$ et les coefficients d_n sont obtenus en résolvant les équations $\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k} = a_n$, $n = 0, 1, \ldots$, avec $a_n \equiv 0$ pour $n > p$ et $b_n \equiv 0$ pour $n > q$. De plus, la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$.

5. Singularités

5.1 DÉFINITION : Pôle et point singulier essentiel. Soit f une fonction analytique sur le disque $0 < |z - z_0| < R$. On dit que f a un *pôle* au point z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Si le point z_0 est un point singulier qui n'est ni éliminable ni un pôle, on dit que c'est un *point singulier essentiel.*

5.2 THÉORÈME : Caractérisation des points singuliers isolés. Soit f une fonction analytique possédant un point singulier isolé en z_0. Alors

(1) z_0 est un point singulier éliminable

- $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$
- $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$, où $c \in \mathbb{C}$.

(2) z_0 est un pôle

- $\Leftrightarrow$ la fonction $g(z) = 1/f(z)$ possède un point singulier éliminable en z_0
- $\Leftrightarrow$ il existe un entier positif m $(m > 0)$ et une fonction $h(z)$ analytique sur un disque $|z - z_0| < R$, où $R > 0$, tels que $h(z_0) \neq 0$ et $f(z) = h(z) / (z - z_0)^m$
- $\Leftrightarrow$ il existe un entier positif m tel que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = c$, où $c \in \mathbb{C}$
- $\Leftrightarrow$ il existe un entier positif m tel que la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ possède un point singulier éliminable en z_0.

5.3 DÉFINITION : Ordre d'un pôle. Si z_0 est un pôle de la fonction f tel que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c \neq 0, c \in \mathbb{C},$$

on dit que z_0 est un pôle d'ordre m.

5.4 THÉORÈME : Points singuliers isolés et séries de Laurent. Soit f une fonction analytique possédant un point singulier isolé en z_0 et dont la série de Laurent est $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour $0 < |z-z_0| < R$. Alors

(1) z_0 est un point singulier éliminable $\quad \Leftrightarrow \quad a_n = 0,\ \forall n < 0$;

(2) z_0 est un pôle d'ordre $m \quad \Leftrightarrow \quad a_{-m} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour $n < -m$;

(3) z_0 est un point singulier essentiel

$\Leftrightarrow \quad a_n \neq 0$ pour un nombre infini de valeurs négatives de n.

5.5 THÉORÈME : Comportement d'une fonction analytique près d'un point singulier essentiel (Picard). Soit f une fonction analytique sur le disque $0 < |z-z_0| < R$. Si z_0 est un point singulier essentiel, alors pour tout nombre complexe $c \in \mathbb{C}$, sauf possiblement un seul, il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeant vers z_0 telle que $f(z_n) = c,\ \forall n$.

REMARQUE : Le théorème de Picard signifie que dans tout voisinage de z_0 et pour tout nombre complexe c (sauf possiblement un seul), la fonction f prend la valeur c une infinité de fois.

6. Fractions partielles

6.1 THÉORÈME : Expansion en fractions partielles d'une fonction rationnelle. Soit la fonction rationnelle $f(z) = P(z)/Q(z)$ où $P(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n$ est un polynôme de degré $p\,(a_p \neq c)$ et $Q(z) = (z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2} \ldots (z-z_q)^{m_q}$ est un polynôme de degré $q_* = \sum_{j=1}^{q} m_j$ possédant q racines distinctes $z_1, \ldots, z_q$ de multiplicités $m_1, \ldots, m_q$ respectivement ($q \geq 1,\ m_j \geq 1$ pour $j = 1, \ldots, q$). Alors la fonction $f(z)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$f(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{q} G_j\left[1/(z-z_j)\right]$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq z_j$, $j = 1, \ldots, q$, où

$$G_j\left[1/(z-z_j)\right] = \sum_{k=1}^{m_j} A_{jk}/(z-z_j)^k ,$$

$A_{jk} \in \mathbb{C}$, et $G(z)$ est un polynôme. De plus, si $p < q_*$, $G(z) \equiv 0$, tandis que, si $p \geq q_*$ et les polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ n'ont aucune racine commune, le degré de $G(z)$ est égal à $p - q_*$.

6.2 THÉORÈME : Factorisation d'une fonction analytique possédant un nombre fini de pôles. Soit f une fonction analytique partout dans un domaine ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points singuliers z_1, ... , z_q qui sont des pôles d'ordre $m_1, \ldots, m_q$ respectivement ($q \geq 1$, $m_j \geq 1$ pour $j = 1, \ldots, q$). Alors il existe une fonction $g(z)$ analytique partout dans U telle que $g(z_j) \neq 0,\ j = 1, \ldots, p$, et

$$f(z) = g(z) / [(z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_q)^{m_q}]$$

pour $z \in U$ et $z \neq z_j,\ j = 1, \ldots, q$. Si, de plus, la fonction f possède un nombre fini de zéros, la fonction f peut s'écrire

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} h(z)$$

pour $z \in U$ et $z \neq z_j,\ j = 1, \ldots, q$, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes sans racine commune, $Q(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_q)^{m_q}$ et $h(z) \neq 0$ pour $z \in U$.

6.3 THÉORÈME : Expansion en fractions partielles d'une fonction analytique possédant un nombre fini de pôles. Soit f une fonction analytique partout dans un domaine ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points singuliers z_1, ... , z_q qui sont des pôles d'ordre $m_1, \ldots, m_q$ ($q \geq 1$, $m_j \geq 1$ pour $j = 1, \ldots, q$). Alors la fonction f peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{q} G_j [1/(z - z_j)]$$

pour tout $z \in U$ tel que $z \neq z_j,\ j = 1, \ldots, q$, où

$$G_j [1/(z - z_j)] = \sum_{k=1}^{m_j} A_{jk} / (z - z_j)^k ,$$

$A_{jk} \in \mathbb{C}$, et $G(z)$ est une fonction analytique partout sur U.

7. Preuves et références

1.	Churchill et Brown (1984, chapitres 2 et 3) et Ahlfors (1979, chapitre 2).
1.2	Ahlfors (1979, section 1.1, p. 22).
1.4	Ahlfors (1979, section 1.1, p. 23).
1.5	Ahlfors (1979, section 1.1, p. 23).
1.6	Ahlfors (1979, section 1.2, p. 24).
1.7 - 1.8	Churchill et Brown (1984, section 15, p. 41-43).
1.9	Churchill et Brown (1984, section 15, p. 41 et section 21, p. 57-58).
1.10	Ahlfors (1979, section 1.1, p. 23).
1.11	Churchill et Brown (1984, section 19, p. 50).
1.12	Churchill et Brown (1984, section 54, p. 156).
1.13 - 1.14	Churchill et Brown (1984, section 19, p. 51).
1.15	Churchill et Brown (1984, section 39, p. 111-114).
1.16	Churchill et Brown (1984, section 9, p. 27, et chapitre 3).
2.	Rudin (1976, chapitre 3), Ahlfors (1979, chapitre 2) et Churchill et Brown (1984, chapitre 5).
2.2	Rudin (1976, section 3.39, p. 69) et Ahlfors (1979, section 2.4, p. 38).
2.4	Wilf (1990, section 2.4, theorem 2.4.2, p. 44).
2.5-2.6	Deshpande (1986, section 6.1, p. 62-64).
2.7	Rudin (1976, section 3.44, p. 71).
2.8	Ahlfors (1979, section 2.5, p. 41-42).
2.9 - 2.10	Devinatz (1968, section 4.5, p. 170-171).
2.11	Gillert et al. (1986, section 21.2, p. 527).
2.13	Ahlfors (1979, section 2.4, p. 38), Churchill et Brown (1984, section 49, p. 144) et Wilf (1990, section 2.4, theorem 2.4.2, p. 44-45).
2.14	Churchill et Brown (1984, section 50, p. 146-147).
2.15	Churchill et Brown (1984, section 49, p. 142).
3.1	Churchill et Brown (1984, section 44, p. 126-128, et section 39, p. 111-114).
3.2	Silverman (1974, section 10.1, p. 139).
3.3	Conséquence directe des théorèmes 2.8 et 3.1.
3.4	Churchill et Brown (1984, section 53, p. 152-153).
3.5	Deshpande (1986, section 10.2, p. 139).
3.6 - 3.7	Deshpande (1986, section 10.1, propositions 10.3 et 10.4, p. 135).

3.8	Churchill et Brown (1984, sections 46 et 50, p. 132-136 et 146-148).
3.9	Churchill et Brown (1984, section 56, p. 160-163).
3.10	Silverman (1974, section 11.1, p. 158).
4.	Churchill et Brown (1984, section 51, p. 148-153) et Deshpande (1986, section 6.1).
4.1	L'énoncé (3) est une conséquence du théorème de Cauchy-Mertens ; voir aussi Devinatz (1968, section 4.5, p. 168-169). L'énoncé (4) est une conséquence de (3).
5.	Deshpande (1986, chapitre 12).
5.1	Deshpande (1986, section 12.1, p. 152).
5.2 - 5.3	Deshpande (1986, section 12.2, propositions 12.2, 12.3, p. 154-155).
5.4	Deshpande (1986, section 12.3, proposition 12.9, p. 163).
5.5	Silverman (1972, section 57, p. 241) et Churchill et Brown (1984, section 56, p. 161).
6.1	Ahlfors (1979, section 1.4, p. 31-32) et Lentin et Rivaud (1964, chapitre II, section 19, p. 234-238).
6.2	Deshpande (1986, section 13.1, proposition 13.1, p. 169-170).
6.3	Deshpande (1986, section 13.1, p. 171).

Références

AHLFORS, L. V. (1979) : *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, third edn.

CARTAN, H. (1961) : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris.

CHURCHILL, R. V., AND J. W. BROWN (1984) : *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, New York, fourth edn.

DESHPANDE, J. V. (1986) : *Complex Analysis*. Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, India.

DEVINATZ, A. (1968) : *Advanced Calculus*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

GILLERT, W., KÜSTNER, H. KELLWICH, AND H. KÄSTNER (1986) : *Petite encyclopédie des mathématiques*. Éditions K. Pagoulatos, Paris and Athens.

GRADSHTEYN, I. S., AND I. M. RYZHIK (1980) : *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York.

KNOPP, K. (1956) : *Infinite Sequences and Series*. Dover Publications, New York.

——— (1990) : *Theory and Application of Infinite Series*. Dover Publications, New York.

RUDIN, W. (1976) : *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*. McGraw-Hill, New York.

——— (1987) : *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, third edn.

SILVERMAN, R. A. (1972) : *Introductory Complex Analysis*. Dover Publications, New York.

——— (1974) : *Complex Analysis with Applications*. Dover Publications, New York.

SPIEGEL, M. R. (1964) : *Theory and Problems of Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and its Applications*. Schaum Publishing Company, New York.

WILF, H. S. (1990) : *Generatingfunctionology*. Academic Press, New York.