Extraction de tendance et désaisonnalisation par la méthode des moyennes mobiles [*]

Jean-Marie Dufour [†]
Université de Montréal

Première version: Février 1987
Révisions: Août 2002
Cette version: 5 avril 2003
Compilé: 5 avril 2003, 3:01pm

[*]Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS) et du Fonds FCAR du Québec.

[†] L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

Liste de définitions, propositions et théorèmes **iii**

1. Principe de la méthode **1**

2. Algèbre des moyennes mobiles **3**

3. Introduction aux équations de récurrence **3**
3.1. Racines distinctes 4
3.2. Racines non distinctes 5

4. Noyau d'une moyenne mobile **5**

5. Séries invariantes par une moyenne mobile **5**

6. Conservation des polynômes de degré p **6**

7. Transformation de séries géométriques **8**

8. Transformation d'un bruit blanc par une moyenne mobile **10**

9. Effet de Slutsky-Yule **11**

10. Moyennes arithmétiques **11**
10.1. Noyau de la moyenne arithmétique d'ordre 2m + 1 12
10.2. Séries invariantes par la moyenne arithmétique 13
10.3. Moyennes arithmétiques de séries périodiques 15
10.4. Moyenne arithmétique d'un bruit blanc 16

11. Annulation des effets saisonniers de période paire **17**

12. Méthodes de construction de moyennes mobiles **18**

13. Composition de moyennes arithmétiques **18**
13.1. Conservation des tendances linéaires et élimination de la saisonnalité . . 19
13.2. Moyennes de Spencer 19

14. Régressions mobiles **21**
14.1. Notions de base 21
14.2. Propriétés des moyennes conservant les polynômes locaux 24

15. Minimisation sous contrainte du pouvoir de réduction (Bongard, 1962) **25**

16. Minimisation de l'irrégularité des coefficients sous contrainte (Henderson) **27**

17. Désaisonnalisation par Census $X - 11$ **28**

18. Traitement des observations aux extrémités **30**
18.1. Moyennes mobiles non centrées 30
18.2. Remplacement des observation manquantes par des prévisions 31

19. Changements de régimes **32**

20. Notes bibliographiques **32**

Liste des tableaux

1 Coefficients du filtre X-11 30

Table des figures

1 Effets d'amplitude et de phase 8
2 Gain de la moyenne arithmétique de la fonction cosinus 16
3 Autocorrélations de la moyenne arithmétique d'un bruit blanc 17

Liste de définitions, propositions et théorèmes

2.2 Definition : Propriétés des moyennes mobiles 3

1. Principe de la méthode

Soit X_t une série qui admet une décomposition additive :

$$X_t = Z_t + S_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, T ,$$

où

$$\begin{array}{rcl} Z_t & : & \text{tendance,} \\ S_t & : & \text{fluctuation saisonnière,} \\ u_t & : & \text{bruit aléatoire.} \end{array}$$

On désire trouver une transformation linéaire telle que

$$X_t^* = Z_t^* + S_t^* + u_t^* = Z_t$$

où

$$Z_t = Z_t, \quad S_t^* = 0, \quad u_t^* = 0 .$$

En pratique,

$$Z_t^* \simeq Z_t, \quad S_t^* \simeq 0, \quad u_t^* = 0 .$$

On aimerait avoir une méthode qui satisfasse les conditions suivantes :

1. calculs simples ;
2. mise à jour facile ;
3. méthode qui réagit bien aux changements de régime.

Type de transformation fréquemment utilisée : moyenne mobile.

1.1 Définition $MM =$ *Somme pondérée de valeurs de X correspondant à des dates entourant t.*

Une moyenne mobile s'écrit :

$$X_t^* = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i X_{t+i} = \theta_{-m_1} X_{t-m_1} + \theta_{-m_1+1} X_{t-m_1+1} + \cdots + \theta_{m_2} X_{t+m_2}$$

où

$$m_1 \geq 0, \; m_2 \geq 0, \; \theta_i \in \mathbb{R} .$$

$$\begin{aligned} \text{Ordre de la } MM &= \text{nombre de points intervenant dans la transformation} \\ &= m_1 + m_2 + 1 . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Calcul réalisable si $m_1 + 1 \leq t \leq T - m_2$ (problème aux extrémités). Pour l'instant, nous supposerons que $t \in \mathbb{Z}$.
Opérateur retard _ $B : (X_t : t \in \mathbb{Z}) \longrightarrow (X_{t-1} : t \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} BX_t &= X_{t-1} , \\ B^i X_t &= X_{t-i} . \end{aligned}$$

Opérateur avance _ $F = B^{-1},\ FX_t = X_{t+1},\ F^i X_t = X_{t+i}$.

On peut écrire la MM :

$$X_t^* = \left[\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i} \right] X_t = MX_t$$

où

$$M = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i} = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i F^i .$$

Si $X = (X_t : t \in \mathbb{Z})$, on note :

$$MX = (MX_t : t \in \mathbb{Z}) \ .$$

1.2 Définition *MM centrée : MM avec $m_1 = m_2 = m$.*

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=-m}^{m} \theta_i B^{-i} = B^m \left[\sum_{i=-m}^{m} \theta_i B^{-(m+i)} \right] \\ &= B^m \left[\theta_{-m} + \theta_{-m+1} B^{-1} + \cdots + \theta_m B^{-2m} \right] \\ &= B^m \theta \left(B^{-1} \right) \\ &= B^m \theta (F) \end{aligned}$$

où

$$\theta(x) = \theta_{-m} + \theta_{-m+1} x + \cdots + \theta_m x^{2m} .$$

Polynôme d'ordre $2m$

1.3 Définition *MM symétrique : MM centrée avec*

$$\theta_i = \theta_{-i},\ i = 1, 2, \ldots , m .$$

2. Algèbre des moyennes mobiles

2.1 Définition *La composée (ou le produit) de deux moyennes mobiles M_1 et M_2 est l'application qui, à toute série X, fait correspondre*

$$MX = M_1 M_2 X \ .$$

2.2 Proposition PROPRIÉTÉS DES MOYENNES MOBILES.

(1) *$M_1 M_2 X$ est une moyenne mobile.*

(2) *Si M_1 est d'ordre n_1 et M_2 est d'ordre n_2, alors $M_1 M_2$ est d'ordre $n_1 + n_2 - 1$.*

(3) *$M_1 M_2 = M_2 M_1$. (Commutativité)*

(4) *Si M_1 et M_2 sont des moyennes mobiles centrées, alors $M_1 M_2$ est une moyenne mobile centrée.*

(5) *Une moyenne mobile M est symétrique ssi le polynôme associé est symétrique.*

(6) *Si M_1 et M_2 sont des moyennes mobiles symétriques, alors $M_1 M_2$ est une moyenne mobile symétrique.*

Une moyenne mobile centrée peut être le produit de deux moyennes mobiles non centrées :

$$\begin{aligned}
M_1 X_t &= (1 - B)\, X_t = X_t - X_{t-1} \ , \\
M_2 X_t &= (F - 1)\, X_t = X_{t+1} - X_t \ , \\
M_1 M_2 X_t &= M_1 X_{t+1} - M_1 X_t = X_{t+1} - X_t - X_t + X_{t-1} \ , \\
&= X_{t+1} - 2X_t + X_{t-1} \ .
\end{aligned}$$

La condition de symétrie peut s'exprimer

$$\begin{aligned}
\theta\,(B) &= \theta_m + \theta_{-m+1} B + \cdots + \theta_m B^{2m} = B^{2m} \left[\theta_{-m} F^{2m} \theta_{-m+1} F^{2m-1} + \cdots + \theta_m \right] \\
&= B^{2m} \left[\theta_{-m} + \theta_{-m+1} F + \cdots + \theta_m F^{2m} \right] \\
&= B^{2m} \theta\,(F) \ .
\end{aligned}$$

[Les moyennes mobiles d'ordre fini constituent un espace vectoriel.]

3. Introduction aux équations de récurrence

Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ une suite satisfaisant l'équation

$$a_0 X_t + a_1 X_{t+1} + \cdots + a_p X_{t+p} = 0, \quad \forall t \ , \tag{3.1}$$

ou

$$X_t = -\frac{a_1}{a_0} X_{t+1} - \cdots - \frac{a_p}{a_0} X_{t+p}\,, \quad \forall t\,. \tag{3.1}$$

Considérons une solution de la forme

$$X_t = \lambda^t\,.$$

Alors, on doit avoir

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_p\lambda^p = 0\,. \tag{3.2}$$

λ doit être une racine du polynôme.

Un polynôme d'ordre p a, au plus, p racines distinctes :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \quad \text{(possiblement complexes).}$$

3.1. Racines distinctes

Si les p racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont distinctes, la solution générale de l'équation (3.1) a la forme

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} c_j \lambda_j^t, \quad c_j \in \mathbb{C}\,.$$

On doit distinguer deux cas :

1. λ_j réels $\rightarrow$ croissance ou décroissance exponentielle ;
2. λ_j complexe : $\lambda_j = \rho_j e^{i\omega_j}, \quad i = \sqrt{-1}$. Dans ce cas, il y a nécessairement une autre racine λ_k telle que

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \bar{\lambda}_j = \rho_j e^{-i\omega_j}, \\ c_k &= \bar{c}_j = A_j e^{-i\varphi_j}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} c_j\lambda_j^t + c_k\lambda_k^t &= A_j e^{i\varphi_j} \rho_j^t e^{i\omega_j t} + A_j e^{-i\varphi_j} \rho_j^t e^{-i\omega_j t} \\ &= A_j \rho_j^t \left[e^{i\left(\omega_j t + \varphi_j\right)} + e^{-i\left(\omega_j t + \varphi_j\right)} \right] \\ &= 2A_j \rho_j^t \cos\left(\omega_j t + \varphi_j\right)\,. \end{aligned}$$

Oscillations convergentes ou explosives suivant que $\left|\rho_j\right| < 1$ ou $\left|\rho_j\right| > 1$.
Période d'oscillation $= 2\pi/\omega_j$.

3.2. Racines non distinctes

S'il y a q racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ $(q \leq p)$ de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ respectivement $\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j = p\right)$, la solution générale de l'équation est

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & \left(c_{11} + c_{12}t + \cdots + c_{1\alpha_1} t^{\alpha_1 - 1}\right) \lambda_1^t + \cdots + \left(c_{q1} + c_{q2}t + \cdots + c_{q\alpha_q} t^{\alpha_q - 1}\right) \lambda_q^t, \\ c_{jk} & \in & \mathbb{C}\,. \end{array}$$

4. Noyau d'une moyenne mobile

4.1 Définition *Le noyau d'une moyenne mobile M (noté $KerM$) est l'ensemble des séries annulées par cette moyenne :*

$$Ker\,(M) = \{X : MX = 0\}\ .$$

Pour $X \in Ker\,(M)$ et si M est centrée,

$$MX_t = \theta_{-m} X_{t-m} + \cdots + \theta_m X_{t+m} = 0, \quad \forall t$$

ou

$$\theta_{-m} X_t + \cdots + \theta_m X_{t+2m} = 0, \quad \forall t\ . \tag{4.1}$$

Toute solution de l'équation de récurrence (4.1) appartient à $Ker\,(M)$.

4.2 Proposition *$Ker(M_1 M_2) \supseteq Ker(M_1) + Ker(M_2)$ (ou $+$ désigne la somme des sous-espaces vectoriels).*

Comme les solutions de l'équation (4.1) sont basées sur les racines de l'équation

$$\theta\,(\lambda) = 0\ ,$$

on appelle celle-ci *l'équation caractéristique* de la moyenne mobile M.

5. Séries invariantes par une moyenne mobile

5.1 Définition *La série X est invariante par la moyenne mobile M ssi*

$$MX_t = X_t, \quad \forall t\ .$$

Si M est une moyenne mobile centrée,

$$X_t \;=\; MX_t = \theta_{-m} X_{t-m} + \cdots + \theta_m X_{t+m}, \quad \forall t$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \theta_{-m}X_t + \theta_{-m+1}X_{t+1} + \cdots + \theta_m X_{t+2m} = X_{t+m}, \quad \forall t \\
&\Leftrightarrow \quad \theta(F)\, X_t = X_{t+m}, \quad \forall t \\
&\Leftrightarrow \quad [\theta(F) - F^m]\, X_t = 0, \quad \forall t \,.
\end{aligned}
$$

La série X est invariante par la moyenne mobile M ssi elle est une solution de l'équation de récurrence :

$$[\theta(F) - F^m]\, X_t = 0 \,. \tag{5.1}$$

Pour déterminer les séries invariantes, il faut résoudre l'équation caractéristique

$$\theta(\lambda) - \lambda^m = 0 \,.$$

On note $J(M)$ l'ensemble des séries X qui sont invariantes par une moyenne mobile M.

5.2 Proposition $J(M_1M_2) \supseteq J(M_1) \cap J(M_2)$.

Si M_1 et M_2 conservent toutes deux la série X, alors la moyenne mobile composée M_1M_2 conserve aussi la série X.

6. Conservation des polynômes de degré p

6.1 Proposition *a) Une moyenne mobile centrée conserve les constantes ssi*

$$\theta_{-m} + \theta_{-m+1} + \cdots + \theta_m = 1 \,.$$

b) Une moyenne mobile symétrique conservant les constantes conserve les polynômes de degré 1.

6.2 Démonstration a)

$$
\begin{aligned}
Mc &= c, \quad \forall c \\
&\Leftrightarrow \quad \theta_{-m} + \cdots + \theta_m = 1 \,.
\end{aligned}
$$

b) On suppose :

$$
\begin{aligned}
\theta_{-m} + \cdots + \theta_m &= 1 \\
\theta_i &= \theta_{-i}, \quad \forall i \,.
\end{aligned}
$$

Soit

$$X_t = a + bt \,.$$

Alors,

$$\begin{aligned} MX_t &= M\left[a+bt\right] = Ma + bMt \\ &= a + Mt\ . \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} Mt &= \sum_{i=-m}^{m} \theta_i \left(t+i\right) = t \sum_{i=-m}^{m} \theta_i + \sum_{i=-m}^{m} \theta_i i \\ &= t + \theta_0 0 + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \left(i - i\right) = t\ , \end{aligned}$$

on trouve

$$MX_t = X_t\ .$$

De façon générale, quand un polynôme de degré p est-il conservé par une moyenne mobile ? Si $X_t = t^n$ et $\Delta = F - 1$,

$$\begin{aligned} \left(F-1\right) t^n &= \left(t+1\right)^n - t^n = t^n + nt^{n-1} + \cdots + 1 - t^n \\ &= nt^{n-1} + \cdots + 1\ . \end{aligned}$$

Si $X_t = a_0 + a_1 t + \cdots + a_p t^p$ est un polynôme de degré p,

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= \text{polynôme de degré } p-1\ , \\ \Delta^{p+1} X_t &= 0\ , \\ \left(F-1\right)^{p+1} X_t &= 0\ . \end{aligned}$$

Si l'opérateur $\theta\left(F\right) - F^m$ peut s'écrire

$$\theta\left(F\right) - F^m = \theta_1\left(F\right)\left(F-1\right)^{p+1}\ ,$$

alors

$$\left[\theta\left(F\right) - F^m\right] X_t = 0$$

pour tout polynôme d'ordre p ou moins.

Pour que la moyenne mobile M conserve les polynômes de degré p, il suffit que $\lambda = 1$ soit une racine d'ordre $p+1$ de l'équation caractéristique

$$\theta\left(\lambda\right) - \lambda^m = 0\ ,$$

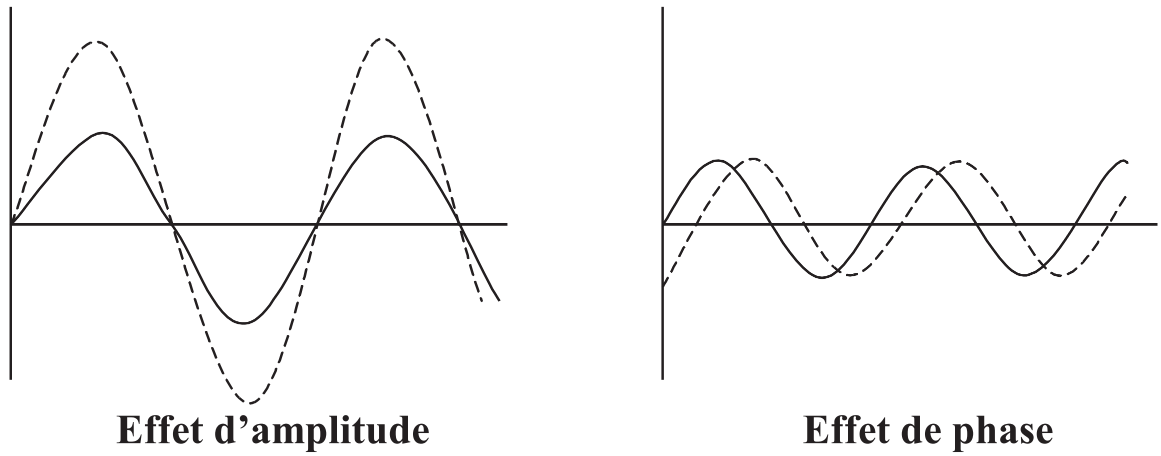

Figure 1. Effets d'amplitude et de phase

i.e.

$$\theta(\lambda) - \lambda^m = (1-\lambda)^{p+1}\,\theta_1(\lambda)$$

où $\theta_1(\lambda)$ est un polynôme de degré $2m-(p+1)$.

7. Transformation de séries géométriques

Considérons la série $X_t = \lambda^t$.Qu'arrive-t-il si on lui applique une moyenne mobile centrée ?

$$\begin{aligned} X_t^* &= MX_t = \theta_{-m}\lambda^{t-m} + \cdots + \theta_m\lambda^{t+m} \\ &= \lambda^t\lambda^{-m}\theta(\lambda) = \left[\lambda^{-m}\theta(\lambda)\right] X_t \end{aligned}$$

où

$$\theta(\lambda) = \theta_{-m} + \theta_{-m+1}\lambda + \cdots + \theta_m\lambda^{2m}\ .$$

Si λ est réel, on obtient la même série multipliée par une constante.

Si λ est complexe, $\lambda = \rho e^{i\omega}$, X_t est multipliée par un nombre complexe

$$\begin{aligned} \lambda^{-m}\theta(\lambda) &= ce^{i\varphi} \\ X_t^* &= ce^{i\varphi}\rho^t e^{i\omega t} = \left(c\rho^t\right)e^{i(\omega t+\varphi)}\ . \end{aligned}$$

À cause de la linéarité de la moyenne mobile, on voit que

$$\begin{array}{rcl}\rho^t \cos(\omega t) & \rightarrow & c\rho^t \cos(\omega t+\varphi) \\ \rho^t \sin(\omega t) & \rightarrow & c\rho^t \sin(\omega t+\varphi)\ .\end{array}$$

Deux types d'effets :

1. effet d'amplitude : X_t multipliée par c;
2. effet de phase : origine du temps changée
   $\rightarrow$ positions des sommets et creux décalées.

Il n'y pas d'effet de fréquence. Prenons $\rho = 1$ (oscillations d'amplitude constante) :

$$X_t = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \tag{7.1}$$

Si la moyenne mobile est symétrique,

$$\begin{array}{rcl}\theta(\lambda) & = & \lambda^{2m}\theta\left(\lambda^{-1}\right) \\ & & \lambda^{-m}\theta(\lambda) = \lambda^{m}\theta\left(\lambda^{-1}\right) = \bar{\lambda}^{-m}\theta\left(\bar{\lambda}\right) \\ & = & \overline{\lambda^{-m}\theta(\lambda)} \quad , \quad \bar{\lambda} = e^{-i\omega} = \lambda^{-1}\end{array}$$

et donc $\lambda^{-m}\theta(\lambda)$ est un nombre réel :

$$\varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi\ . \tag{7.2}$$

Si $\varphi = 0$, pas d'effet de phase.

Si $\varphi = \pi$, opposition de phase : creux $\leftrightarrow$ sommets.

On peut mesurer l'effet d'amplitude par

$$\begin{array}{rcl}c & = & \left|e^{-im\omega}\theta\left(e^{i\omega}\right)\right| = \left|\theta\left(e^{i\omega}\right)\right| \\ & = & \left|\sum_{j=-m}^{+m} \theta_j e^{ij\omega}\right|\end{array}$$

et dans le cas d'une moyenne mobile symétrique

$$c = \left|\sum_{j=-m}^{m} \theta_j \cos(j\omega)\right|\ .$$

On appelle

$$|g(\omega)| = \left|\theta\left(e^{i\omega}\right)\right|$$

le *gain* de la moyenne mobile.

8. Transformation d'un bruit blanc par une moyenne mobile

Soit $(u_t : t \in \mathbb{Z})$ des v.a.'s telles que

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0, \quad \forall t\ , \\ E(u_s u_t) &= 0, \quad \text{si } s \neq t \\ &= \sigma^2, \quad \text{si } s = t\ . \end{aligned}$$

u_t est un bruit blanc. Considérons :

$$u_t^* = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j u_{t+j}\ .$$

Alors,

$$\begin{aligned} E(u_t^*) &= 0\ , \\ V(u_t^*) &= \sigma_*^2 = \sigma^2 \sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2\ . \end{aligned}$$

Si $\sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 < 1$, la moyenne mobile a une variance inférieure à celle du bruit blanc :

$$\frac{\sigma_*^2}{\sigma^2} = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 \qquad \text{Rapport de réduction de la variance résiduelle.}$$

Contrairement à u_t, les variables transformées sont corrélées entre elles. Les autocovariances de u_t^* sont :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= cov\left(u_t^*, u_{t+k}^*\right) \\ &= \sum_{i=-m}^{m} \sum_{j=-m}^{m} \theta_i \theta_j E(u_{t+i}, u_{t+k+j}) \\ &= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=k-m}^{m} \theta_i \theta_{i-k}, & \text{si } 0 \leq k \leq 2m\ , \\ 0 & , \quad \text{si } k > 2m\ , \end{cases} \\ \gamma(-k) &= \gamma(k)\ . \end{aligned}$$

Le corrélogramme de u_t^* est

$$\rho(k) = \gamma(k) / \gamma(0) \ .$$

9. Effet de Slutsky-Yule

Lorsqu'on transforme une série en prenant une moyenne mobile, on réduit la variabilité mais on introduit aussi une autocorrélation qui n'est pas présente dans la série originale [Yule (1921), Slutsky (1937)]. Ceci donne lieu à des oscillations plus ou moins régulières (cycles artificiels).

9.1 Exemple Graphiques de Gouriéroux et Monfort (1983, pp. 80-81) _ 30 observations

$$u_t^* = \frac{1}{8}\left[u_{t-2} + 2u_{t-1} + 2u_t + 2u_{t-1} + u_{t+2}\right] \ .$$

Pour mieux comprendre ce qui se passe, on peut calculer la *périodicité moyenne* des cycles induits par la moyenne mobile. Supposons que $u_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Alors

$$\mu \equiv P\left[u_t^* < 0, u_{t+1}^* > 0\right] = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\arccos\left[\rho(1)\right]}{2\pi} = P\left[u_t^* > 0, u_{t+1}^* < 0\right]$$

où $\cos\alpha = \rho(1) = \text{cov}\left(u_t^*, u_{t+1}^*\right)$. μ est la probabilité d'une traversée de l'axe des x.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\mu} = \text{distance moyenne entre deux transversales de l'axe des } x && (9.1) \\ &= \frac{2\pi}{\arccos\left[\rho(1)\right]}. && (9.2) \end{aligned}$$

Les oscillations deviennent négligeables lorsque σ_*^2/σ^2 est petit.

10. Moyennes arithmétiques

La moyenne arithmétique est la moyenne mobile la plus simple :$X_t^* = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} X_{t+j}$ .C'est une moyenne mobile symétrique avec

$$\sum_{j=-m}^{m} \theta_j = 1 \ .$$

Si $\{X_t\}$ est un bruit blanc $(0, \sigma^2)$,

$$Var\,(X_t^*) = \sigma^2 \sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 = \sigma_*^2 \; .$$

En choisissant $\theta_j = 1/\,(2m+1) \quad , \quad j = -m, \, \dots \, , m,$

$$\begin{array}{rl} \text{on minimise} & \displaystyle\sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 \\ \text{sujet à} & \displaystyle\sum_{j=-m}^{m} \theta_j = 1 \; . \end{array}$$

La moyenne arithmétique est la moyenne centrée préservant les constantes telles que σ_*^2/σ^2 est minimal : $\sigma_*^2/\sigma^2 = \frac{1}{2m+1}$.

Nous allons adopter les notations suivantes :

$$\begin{aligned} [1] &= \{[1]\,;[1]\} \\ [3] &= \left\{[3]\,;\left[\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right]\right\} \\ [5] &= \left\{[5]\,;\left[\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5}\right]\right\} \; . \end{aligned} \tag{10.1}$$

10.1. Noyau de la moyenne arithmétique d'ordre 2m + 1

$$X_t^* = \theta\,(F)\,B^m X_t = \theta\,(F)\,X_{t-m}$$

où

$$\begin{aligned} \theta\,(x) &= \theta_{-m} + \theta_{-m+1}x + \cdots + \theta_m x^{2m} \; , \\ \theta_j &= 1/\,(2m+1) \; . \end{aligned}$$

Le noyau de la moyenne arithmétique d'ordre $2m+1$ est formé par les solutions de l'équation de récurrence $\theta\,(F)\,x_t = 0$ .Ces solutions sont obtenues en trouvant les racines du polynôme :

$$\begin{aligned} \theta\,(\lambda) &= \frac{1}{2m+1}\left(1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{2m}\right) \\ &= \frac{1}{2m+1}\,\frac{1-\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} \; . \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned}\theta(\lambda)=0 &\Leftrightarrow 1-\lambda^{2m+1}=0, \quad \lambda\neq 1\\ &\Leftrightarrow \lambda=e^{i2\pi j/(2m+1)}, \quad j=1,\ldots,2m, \quad i=\sqrt{-1}\,.\end{aligned}$$

Les éléments du noyau ont la forme

$$\begin{aligned}S_t &= \sum_{j=1}^{2m} c_j e^{i2\pi jt/(2m+1)}\\ &= \sum_{j=1}^{2m}\left[c_{1j}\cos\left(\frac{2\pi jt}{2m+1}\right)+c_{2j}\sin\left(\frac{2\pi jt}{2m+1}\right)\right]\,.\end{aligned}$$

Il s'agit donc des suites périodiques telles que

$$\sum_{j=-m}^{m} S_{t+j}=0\,.$$

La moyenne arithmétique d'ordre $2m+1$ permet d'annuler les séries périodiques de période $2m+1$.

10.2. Séries invariantes par la moyenne arithmétique

Les constantes et polynômes de degré 1 sont conservés par la moyenne arithmétique. Afin de trouver toutes les séries invariantes par la moyenne arithmétique, on doit trouver les solutions de l'équation

$$\theta(\lambda)-\lambda^m=0\,.$$

10.1 Exemple Si $m=2$,

$$\theta(\lambda)=\frac{1}{5}\big(1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^4\big) \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned}\theta(\lambda)-\lambda^2 &= \frac{1}{5}\lambda^4+\frac{1}{5}\lambda^3-\frac{4}{5}\lambda^2+\frac{1}{5}\lambda+\frac{1}{5}\\ &= \frac{1}{5}(\lambda-1)^2\left(\lambda^2+3\lambda+1\right)\,.\end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont :

$$\lambda_1 = 1 \text{ (racine de multiplicité 2)}\,,$$

$$\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} .$$

Forme générale des séries invariantes :

$$S_t = (a+bt)(1)^t + c_1\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^t .$$

Les polynômes de degré 2 ne sont pas en général conservés par la moyenne arithmétique. Si $X_t = t^2$,

$$\begin{aligned}
X_t^* &= \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m}(t+j)^2 \\
&= \frac{1}{2m+1}\left[\sum_{j=-m}^{m} t^2 + 2t\sum_{j=-m}^{m} j + \sum_{j=-m}^{m} j^2\right] \\
&= \frac{1}{2m+1}\left[(2m+1)\,t^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{3}\right] \\
&= t^2 + \frac{m(m+1)}{3} \neq t^2 .
\end{aligned}$$

Si $X_t = a + bt + ct^2$,

$$\begin{aligned}
X_t^* &= \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m}\left[a + b(t+j) + c(t+j)^2\right] \\
&= a + bt + ct^2 + c\frac{m(m+1)}{3} \\
&= \left[a + c\frac{m(m+1)}{3}\right] + bt + ct^2 .
\end{aligned}$$

Si $X_t = t^3$,

$$\begin{aligned}
X_t^* &= \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m}(t+j)^3 = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m}\left[t^3 + 3jt^2 + 3j^2t + j^3\right] \\
&= \frac{1}{2m+1}\left[(2m+1)\,t^3 + 3\sum_{j=-m}^{m} j^2 t + \sum_{j=-m}^{m} j^3\right] .
\end{aligned}$$

10.3. Moyennes arithmétiques de séries périodiques

On a vu qu'une série périodique est transformée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t) &\rightarrow cA\cos(\omega t+\varphi) \\ A\sin(\omega t) &\rightarrow cA\sin(\omega t+\varphi)\ , \end{aligned}$$

où

$$c = \left|e^{im\omega}\theta\left(e^{i\omega}\right)\right| = \left|\theta\left(e^{i\omega}\right)\right| \equiv g(\omega)\ ,$$

mesure l'effet d'amplitude de la moyenne mobile (gain) $\left[i=\sqrt{-1}\right]$.

Dans le cas d'une moyenne arithmétique centrée,

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \left|\theta\left(e^{i\omega}\right)\right| = \left|\frac{1}{2m+1}\left(e^{-im\omega}+\cdots+e^{im\omega}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2m+1}\left|1+e^{i\omega}+e^{i2\omega}+\cdots+e^{i(2m)\omega}\right| \\ &= \frac{1}{2m+1}\,\frac{\left|1-e^{i(2m+1)\omega}\right|}{\left|1-e^{i\omega}\right|} \\ &= \frac{1}{2m+1}\,\frac{\left\{[1-\cos(2m+1)\omega]^2\,[\sin(2m+1)\omega]^2\right\}^{1/2}}{\left\{[1-\cos\omega]^2+[\sin\omega]^2\right\}^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2m+1}\,\frac{2-2\cos[(2m+1)\omega]}{2-2\cos\omega} \\ &= \frac{1}{2m+1}\left[\frac{1-\cos[(2m+1)\omega]}{1-\cos\omega}\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2m+1}\left|\frac{\sin\left[(2m+1)\frac{\omega}{2}\right]}{\sin[\omega/2]}\right| \end{aligned}$$

où on s'est servi de l'identité $\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = (1-\cos\theta)/2$.

$$g(\omega) = 0 \text{ lorsque } \omega = \frac{2\pi k}{2m+1}, \quad k=1,2,\ \ldots\ .$$

$g(\omega)$ est proche de zéro lorsque ω est proche de $2\pi k/(2m+1)$

Si $m\rightarrow\infty$, $g(\omega)\rightarrow 0$. Une moyenne mobile longue tend à rendre la série constante.

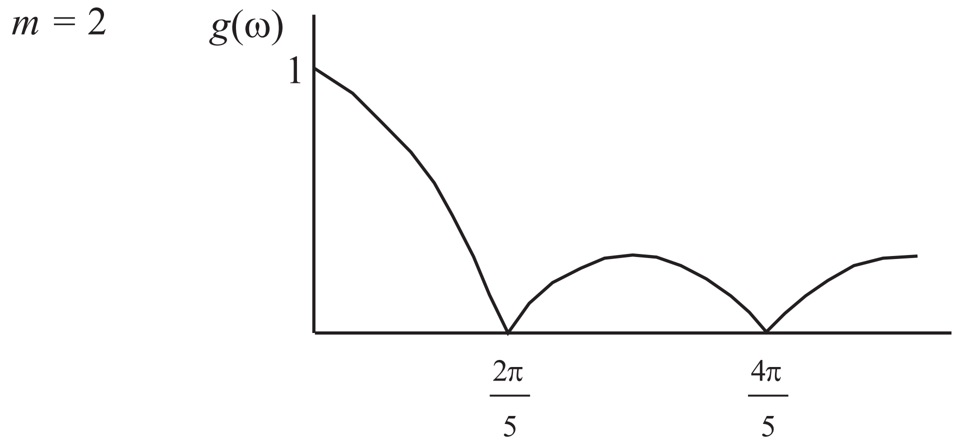

Figure 2. Gain de la moyenne arithmétique de la fonction cosinus

10.4. Moyenne arithmétique d'un bruit blanc

Considérons

$$u_t^* = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} u_t, \quad u_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right) .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= \sigma^2 \sum_{j=k-m}^{m} \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 = \sigma^2 \frac{2m+1-k}{(2m+1)^2}, \quad \text{si } 0 \leq k \leq 2m ,\\
&= 0, \quad \text{si } k \geq 2m+1 ,\\
\rho(k) &= \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{2m+1-k}{2m+1}, \quad \text{si } 0 \leq k \leq 2m ,\\
&= 0, \quad \text{si } k \geq 2m+1 .
\end{aligned}$$

La longueur moyenne des cycles de Slutsky-Yule est :

$$\tau = \frac{2\pi}{\arccos\left[\rho(1)\right]} = \frac{2\pi}{\arccos\left[\frac{2m}{2m+1}\right]}$$

m	1	2	3	4	5	6
τ	7.4	9.7	11.8	12.9	14.5	15.7

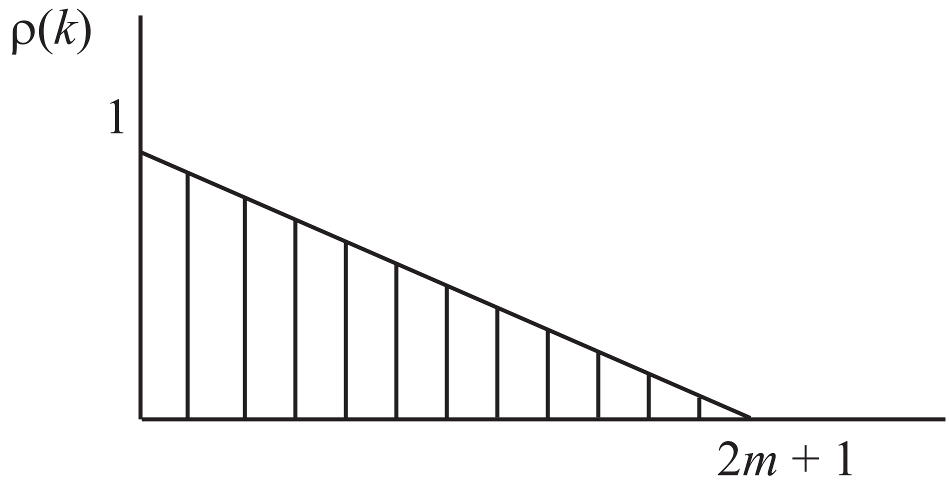

Figure 3. Autocorrélations de la moyenne arithmétique d'un bruit blanc

11. Annulation des effets saisonniers de période paire

La moyenne arithmétique d'ordre $2m+1$ annule les fonctions périodiques de période $2m+1$.

Les périodes saisonnières sont paires : 4 ou 12.

Pour annuler de telles fonctions périodiques, considérons les moyennes mobiles non symétriques suivantes :

$$X_{1t}^{*} = \frac{1}{2m}\left[X_{t-m} + \cdots + X_{t+m-1}\right]$$

$$X_{2t}^{*} = \frac{1}{2m}\left[X_{t-m+1} + \cdots + X_{t+m}\right]$$

et

$$\begin{aligned} X_t^{*} &= \frac{1}{2}X_{1t}^{*} + \frac{1}{2}X_{2t}^{*} \\ &= \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2}X_{t-m} + X_{t-m+1} + \cdots + X_{t+m-1} + \frac{1}{2}X_{t+m}\right] \equiv MX_t\ . \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de la moyenne mobile M est :

$$\theta(\lambda) = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2} + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{2m-1} + \frac{1}{2}\lambda^{2m}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m}\,\frac{1}{2}\,(1+\lambda)\left(1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{2m-1}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\,\frac{1}{2}\,(1+\lambda)\,\frac{1-\lambda^{2m}}{1-\lambda}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta(\lambda) = 0 \qquad & \text{si } \lambda = e^{i2\pi k/2m}, \quad k = 1, \ldots, 2m+1 \\
& \text{ou } \lambda = -1\,.
\end{aligned}
$$

Le rapport de réduction de la variance : $\frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{4m}\right)$.

$$
\sigma_*^2/\sigma^2 = \frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{4m}\right) \tag{11.1}
$$

Pour $2m = 12$,

$$
\sigma_*^2/\sigma^2 = 0.08\,, \tag{11.2}
$$

$$
\tau = 15.3\,. \tag{11.3}
$$

12. Méthodes de construction de moyennes mobiles

Si on désire obtenir des moyennes mobiles qui permettent de

1. conserver les polynômes de degré p, et
2. annuler les fonctions périodiques de périodes choisies (saisonnalité),

il y a généralement plusieurs façons de le faire. Les principales méthodes sont :

1. la composition de moyennes arithmétiques : moyennes de Spencer ;
2. les régressions mobiles [Kendall, Stuart et Ord (1983)] ;
3. la minimisation sous contrainte du pouvoir de réduction [Bongard (1962)] ;
4. la minimisation de l'irrégularité sous contrainte (Henderson).

13. Composition de moyennes arithmétiques

Comme les moyennes arithmétiques sont faciles à calculer, il peut être intéressant de construire le filtre désiré en appliquant successivement plusieurs moyennes arithmétiques.

13.1. Conservation des tendances linéaires et élimination de la saisonnalité

Supposons que l'on désire conserver les polynômes de degré 1 et annuler les effets saisonniers de période 4 dont l'amplitude peut varier linéairement :

$$S_t = (A_1 + A_2 t)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + (A_3 + A_4 t)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + (A_5 + A_6 t)\cos(\pi t) \ .$$

Notons que $\sin(\pi t) = 0$. On peut obtenir ce résultat en composant deux moyennes mobiles non centrées :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4}\left(B + 1 + F + F^2\right)\frac{1}{4}\left(B^2 + B + 1 + F\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(B^3 + 2B^2 + 3B + 4 + 3F + 2F + F^3\right) = B^3\theta(F) \\ &= [4]^2 = \left\{[7]\,;\left[\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}\right]\right\} \ . \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\theta(\lambda) = \frac{1}{16}\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = e^{i\frac{2\pi}{4}k}, \quad k = 1, 2, 3 \ .$$

M préserve les polynômes de degré 1 et

$$\sigma_*^2/\sigma^2 = 0,17, \quad \tau \simeq 15 \ .$$

13.2. Moyennes de Spencer

Considérons des séries trimestrielles. On cherche une moyenne mobile qui :

1. annule les effets saisonniers de périodes 4 et 5,
2. conserve les polynômes de degré plus petit ou égal à 3.

Prenons d'abord :

$$M_1 = [4]^2\,[5]$$

où

$$\begin{aligned} [5] &= \frac{1}{5}\left(B^2 + B + 1 + F + F^2\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\delta^2 + 5\delta + 5\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta &= (1-B)(F-1) = B+F-2 = F(1-B)^2 \ , \\
[4]^2 &= \frac{1}{16}\left(B^2+B+1+F\right)\left(B+1+F+F^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\delta^3+8\delta^2+20\delta+16\right) \ ,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
M_1 = 1+\frac{1}{80}\left(180\delta+156\delta^2+65\delta^2+13\delta^4+\delta^5\right) = 1+\frac{9}{4}\delta+M_2 \ .
$$

Par construction,

M_1 annule les effets saisonniers de périodes 4 et 5.

Prenons ensuite

$$
M = M_1\left(1-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2\right) \ .
$$

On voit aisément que M_1 est une moyenne mobile d'ordre $2m+1$ avec $m=5$:

$$
M_1 = B^5\theta_1(F) = B^5\left[\theta_{-5}+\theta_{-4}F+\cdots+\theta_5F^{10}\right] \ .
$$

Par conséquent,

$$
M = \left(1+\frac{9}{4}\delta+M_2\right)\left(1-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2\right) = B^7\theta(F)
$$

est une moyenne mobile d'ordre $2(7)+1=15$. De plus,

$$
\begin{aligned}
\theta(F) &= B^{-7}M = F^7M \ , \\
\theta(F)-F^7 &= F^7(M-1) \ , \\
&= F^7\left[1-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2+\left(\frac{9}{4}\delta+M_2\right)\left(1-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2\right)-1\right] \\
&= F^7\left[-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2+\frac{9}{4}\delta+\frac{9}{4}\delta\left(-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2\right)+M_2\left(1-\frac{9}{4}\delta-\frac{3}{4}\delta^2\right)\right] \\
&= F^7\delta^2[\quad] = (1-B)^4F^9[\quad] = (F-1)^4F^5[\quad]
\end{aligned}
$$

où $\delta = F(1-B)^2$. On voit que $\theta(F)-F^7$ est divisible par $(F-1)^4$ et donc M conserve les polynômes de degré ≤ 3.On peut écrire la *moyenne de Spencer sur 15 points* :

$$
M = \left\{[15]\,;\frac{1}{320}[-3,-6,-5,3,21,46,67,74]\right\}.
$$

les caractéristiques de celle-ci sont :

$$\begin{aligned} \sigma_*^2/\sigma^2 &= 0.19\;, \\ \tau &= 15.9\;. \end{aligned}$$

La moyenne de Spencer sur 15 points peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4}\left(-3B^2+3B+4+3F+3F^2\right)\frac{1}{5}\left(B^2+B+1+F+F^2\right) \\ &\quad \frac{1}{4}\left(B+1+F+F^2\right)\frac{1}{4}\left(B^2+B+1+F\right)\;; \end{aligned}$$

voir Makridakis, Wheelwright et McGee (1983, p. 147) et Kendall et al. (1983, p. 458).

La moyenne de Spencer sur 21 points possède des propriétés analogues :

$$\begin{aligned} M &= [5]^2\,[7]\left(1-4\delta^2-3\delta^4-\frac{\delta^6}{2}\right) \\ &= \frac{1}{5}\,[5]^2\,[7]\left(-B^3+B+2+F+F^3\right) \\ &= \left\{[21]\,;\frac{1}{350}\,[-1,-3,-5,-5,-2,6,18,33,47,57,60]\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_*^2/\sigma^2 &= 0.15, \\ \tau &= 21.3\;. \end{aligned} \tag{13.1}$$

14. Régressions mobiles

14.1. Notions de base

Une approche plus systématique pour obtenir une moyenne mobile préservant les polynômes de degré p consiste à ajuster un polynôme de degré p à $2m+1$ observations $(p \leq 2m)$ centrées sur X_t.

14.1 Définition *Une série $\{X_t\,:t\in\mathbb{Z}\}$ est assimilable à un polynôme de degré p, sur tout intervalle de temps de longueur $2m+1$ si, en ajustant sur chaque intervalle $(t-m, t-m-1, \ldots, t+m)$ un polynôme de degré p par MCO, la valeur ajustée est égale à la valeur vraie au point central de l'intervalle :*

$$\hat{X}_t = X_t\;.$$

Considérons les observations

$$X_{t-m}, X_{t-m+1}, \dots, X_{t+m}$$

et cherchons $a_0, a_1, \dots, a_p$ tels que

$$\sum_{j=-m}^{m} \left[X_{t+j} + (a_0 + a_1 j + \cdots + a_p j^p)\right]^2 \text{ est minimum,}$$

d'où

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t+j} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 j + \cdots + \hat{a}_p j^p , \\ \hat{X}_t &= \hat{a}_0 = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j X_{t+j} . \end{aligned}$$

Les coefficients θ_j ne dépendent pas de t ou des $\{X_t\}$. Pour déterminer les θ_j, on doit effectuer la régression

$$y = Za + u ,$$

ce qui donne

$$(Z'Z)\,\hat{a} = Z'y \qquad \qquad \text{Équations normales}$$

où

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} Z'_{-m} \\ Z'_{-m+1} \\ \vdots \\ Z'_m \end{bmatrix}, \quad Z'_j = \left(1, j, j^2, \dots, j^p\right) , \\ y &= \begin{pmatrix} X_{t-m} \\ X_{-m+1} \\ \vdots \\ X_{t+m} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} , \\ & Z'Z = \left[\sum_{j=-m}^{m} j^{k+l}\right]_{k,l=0,1,\dots,p} . \end{aligned}$$

On voit que

$$\hat{a}_0 \sum_{j=-m}^{m} j^{0+l} + \hat{a}_1 \sum_{j=-m}^{m} j^{1+l} + \cdots + \hat{a}_p \sum_{j=-m}^{m} j^{p+l} = \sum_{j=-m}^{m} j^l X_{t+j} , \quad l = 0, 1, \dots, p .$$

Notons aussi que

$$\sum_{j=-m}^{m} j^k = 0 \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

14.2 Exemple Si $m = 2, p = 3$, on a

$$\begin{cases} \hat{a}_0 \sum_{j=-2}^{2} 1 & + & \hat{a}_2 \sum_{j=-2}^{2} j^2 & & & = & \sum_{j=-2}^{2} X_{t+j} \\ & \hat{a}_1 \sum_{j=-2}^{2} j^2 & & + & \hat{a}_3 \sum_{j=-2}^{2} j^4 & = & \sum_{j=-2}^{2} jX_{t+j} \\ \hat{a}_0 \sum_{j=-2}^{2} j^2 & + & \hat{a}_2 \sum_{j=-2}^{2} j^4 & & & = & \sum_{j=-2}^{2} j^2 X_{t+j} \\ & \hat{a}_1 \sum_{j=-2}^{2} j^4 & & & \hat{a}_3 \sum_{j=-2}^{2} j^6 & = & \sum_{j=-2}^{2} j^3 X_{t+j} \; , \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 5\hat{a}_0 & + & 10\hat{a}_2 & & & = & \sum_{j=-2}^{2} X_{t+j} \\ & 10\hat{a}_1 & & + & 34\hat{a}_3 & = & \sum_{j=-2}^{2} jX_{t+j} \\ 10\hat{a}_0 & + & 34\hat{a}_2 & & & = & \sum_{j=-2}^{2} j^2 X_{t+j} \\ & 34\hat{a}_1 & & + & 130\hat{a}_3 & = & \sum_{j=-2}^{2} j^3 X_{t+j} \; , \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 85\hat{a}_0 & + & 170\hat{a}_2 & = & 17 \sum_{j=-2}^{2} X_{t+j} \\ 50\hat{a}_0 & + & 170\hat{a}_2 & = & 5 \sum_{j=-2}^{2} j^2 X_{t+j} \; . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \frac{1}{35} \sum_{j=-2}^{2} \left(17 - 5j^2\right) X_{t+j} \\ &= \frac{1}{35} \left[-3X_{t-2} + 12X_{t-1} + 17X_t + 12X_{t+1} - 3X_{t+2}\right] \; . \end{aligned}$$

Pour des moyennes qui conservent les polynômes de degré 3 (et 2) et 5 (et 4), voir le tableau (p. 454) dans Kendall et al. (1983, p. 454).

Moyennes mobiles préservant les polynômes d'ordre 2 et 3 :

[5]	$\frac{1}{35}$	$[-3, 12, \mathbf{17}]$
[7]	$\frac{1}{21}$	$[-2, 3, 6, \mathbf{7}]$
[9]	$\frac{1}{231}$	$[-21, 14, 39, 54, \mathbf{59}]$
[11]	$\frac{1}{429}$	$[-36, 9, 44, 69, 84, \mathbf{89}]$
[13]	$\frac{1}{143}$	$[-11, 0, 9, 16, 21, 24, \mathbf{25}]$
[15]	$\frac{1}{1105}$	$[-78, -13, 42, 87, 122, 147, 162, \mathbf{167}]$
[17]	$\frac{1}{323}$	$[-21, -6, 7, 18, 27, 34, 39, 42, \mathbf{43}]$
[19]	$\frac{1}{2261}$	$[-136, -51, 24, 89, 144, 189, 224, 249, 264, \mathbf{269}]$
[21]	$\frac{1}{3059}$	$[-171, -76, 9, 84, 149, 204, 249, 284, 309, 324, \mathbf{329}]$

Moyennes mobiles préservant les polynômes d'ordre 4 et 5 :

[7]	$\frac{1}{231}$	$[5, -30, 75, \mathbf{131}]$
[9]	$\frac{1}{429}$	$[15, -55, 30, 135, \mathbf{179}]$
[11]	$\frac{1}{429}$	$[18, -45, -10, 60, 120, \mathbf{143}]$
[13]	$\frac{1}{2431}$	$[110, -198, -135, 110, 390, 600, \mathbf{677}]$
[15]	$\frac{1}{46189}$	$[2145, -2860, -2937, -165, 3755, 7500, 10125, \mathbf{11063}]$
[17]	$\frac{1}{4199}$	$[195, -195, -260, -117, 135, 415, 660, 825, \mathbf{883}]$
[19]	$\frac{1}{7429}$	$[340, -255, -420, -290, 18, 405, 790, 1110, 1320, \mathbf{1393}]$
[21]	$\frac{1}{260015}$	$[11628, -6460, -13005, -11220, -3940, 6378, 17655, 28190, 36660, 42120, \mathbf{44003}]$

14.2. Propriétés des moyennes conservant les polynômes locaux

1. Si une moyenne conserve les polynômes locaux de degré p, elle conserve aussi les polynômes de degré p.
2. $\sum_{j=-m}^{m} \theta_j = 1$.
3. $\sum_{j=-m}^{m} j^k \theta_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$ [k impair]
4. La moyenne calculée pour le polynôme de degré pair $p = 2q$ est la même que celle calculée pour le polynôme de degré impair $p = 2q + 1$.
5. Le pouvoir de réduction de la variance résiduelle est

$$\frac{\sigma_*^2}{\sigma^2} = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 = \theta_0 \ .$$

Ceci provient de l'idempotence de la matrice P telle que

$$\hat{X} = PX, \quad X = (X_{-m}, X_{-m+1}, \ldots, X_m)' \ . \tag{14.1}$$

On obtient ainsi :

p	m	σ_*^2/σ^2	τ
3	2	0.49	6.5
3	3	0.33	8.4
3	6	0.17	13.0
3	7	0.15	14.3
5	6	0.28	10.3
5	7	0.24	11.5

(14.2)

15. Minimisation sous contrainte du pouvoir de réduction

(Bongard, 1962)

Soit

$$X_t = \sum_{j=0}^{p} \beta_j Z_j(t) + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k S_k(t) + u_t$$

où

$S_k(t)$ est une fonction périodique (saisonnalité),
$Z_j(t)$ représente la tendance (e.g., $Z_j(t) = t^j$).

Pour qu'une moyenne mobile M

conserve la tendance $\sum_{i=0}^{p} \beta_i Z_i(t)$,
élimine la saisonnalité $\sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k S_k(t)$,

il faut et il suffit que

$$MZ_j(t) = Z_j(t), \quad \forall t, \quad j = 0, \ldots, p, \tag{15.1a}$$
$$MS_k(t) = 0, \quad \forall t. \tag{15.1b}$$

Il y a en général plusieurs moyennes mobiles qui conservent les polynômes de degré p et/ou annulent les fonctions périodiques saisonnières. Comme il est désirable de réduire le plus possible l'importance du bruit u_t, on choisit M tel que

$$Mu_t = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j u_t$$

a la plus petite variance possible :

$$Var\left[Mu_t\right] = \sigma^2 \sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 \ .$$

Ceci conduit à choisir $\{\theta_j\}$ de façon à résoudre le problème :

$$Min \sum_{j=-m}^{m} \theta_j^2 \text{ sujet aux contraintes (15.1a) et (15.1b) .}$$

Par exemple, prenons

$$\begin{aligned} Z_j\left(t\right) &= t^j, \quad j = 0, 1, \ldots, p \\ S_k\left(t\right) &= \cos\left[\frac{2\pi tk}{12}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 6 \ , \\ &= \sin\left[\frac{2\pi t\left(12-k\right)}{12}\right], \quad k = 7, 8, \ldots, 11 \ . \end{aligned}$$

Si $p = 3$, les coefficients doivent satisfaire les contraintes

$$\sum_{j=-m}^{m} \theta_j = 1, \sum_{j=-m}^{m} j\theta_j = \sum_{j=-m}^{m} j^2\theta_j = \sum_{j=-m}^{m} j^3\theta_j = 0 \quad (15.2a)$$

$$\sum_{j=-m}^{m} \theta_j \cos\left(\frac{2\pi tk}{12}\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, 6 \ , \quad (15.2b)$$

$$\sum_{j=-m}^{m} \theta_j \sin\left(\frac{2\pi jk}{12}\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, 5 \ . \quad (15.2c)$$

Comme il y a 15 contraintes, la moyenne doit avoir au moins 15 termes.

Si on prend 15 termes, il y a un seul choix possible.

Si on prend $19 = 2m + 1$ termes $(m = 9)$, il y a quatre degrés de liberté.

Si on minimise

$$\sum_{j=-9}^{9} \theta_j^2$$

sujet à (15.2), on obtient la moyenne mobile :

$$M = \left\{[19]\,; \frac{1}{4032}\left[-267, -122, 23, 168, 313, 458, 603, 336, 336, 336\right]\right\}$$

avec

$$\sigma_*^2/\sigma^2 = 0,13, \quad \tau = 12,4 \ .$$

16. Minimisation de l'irrégularité des coefficients sous contrainte (Henderson)

La série $MX_t = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j X_{t+j}$ est habituellement plus lisse que la série originale X_t. Un critère de choix possible consiste à déterminer $\{\theta_j\}$ de façon à ce que les θ_j aient une évolution relativement lisse. Pour ce faire, on peut utiliser le critère de souplesse

$$Q = \sum_j \left(\nabla^3 \theta_j\right)^2 , \quad \nabla \equiv 1 - B \ .$$

$Q = 0$ si les θ_j se trouvent sur un polynôme d'ordre 2.

Pour obtenir une moyenne mobile préservant les polynômes d'ordre p, Henderson propose de résoudre le problème :

$$\begin{array}{lll} \underset{\theta_j}{Min} & \sum_j \left(\nabla^3 \theta_j\right)^2 & \\ \text{sujet à} & \sum_{j=-m}^{m} \theta_j = 1 \ , & \\ & \sum_{j=-m}^{m} j^k \theta_j = 0, & k = 1, 2, \ldots , p \ . \end{array}$$

Avec $p = 2$, on obtient

$$\theta_j = \frac{315 \left[(n-1)^2 - j^2\right] \left[n^2 - j^2\right] \left[(n+1)^2 - j^2\right] \left[3n^2 - 16 - 11j^2\right]}{8n\left(n^2-1\right)\left(4n^2-1\right)\left(4n^2-9\right)\left(4n^2-25\right)}$$

où $n = m + 2$.

La moyenne d'Henderson à 15 points $(m = 7, \ n = 9)$ pour des données mensuelles a la forme :

$$M = \left\{ [15] \, ; \frac{1}{193154} \left[-2652, -3732, -2730, 3641, 16016, 28182, 37422, 40860\right] \right\} \ .$$

Cette moyenne mobile n'élimine pas complètement la saisonnalité de période 12.

La moyenne à 5 points d'Henderson (données trimestrielles) :

$$M = \left\{ [5] \, ; \frac{1}{286} [-21, 84, 160] \right\} \, .$$

17. Désaisonnalisation par Census $X - 11$

Les moyennes mobiles sont utilisées pour désaisonnaliser un grand nombre de séries économiques.

Après plusieurs années de recherche, le Bureau of Census (U.S.) a proposé le programme $X - 11$ [Shiskin, Young et Musgrave (1967)].

Plusieurs versions sont disponibles :

$$\begin{array}{r l} \text{additive} & \left\{ \begin{array}{l} \text{trimestrielle} \\ \text{mensuelle} \end{array} \right. \\ \text{multiplicative} & \left\{ \begin{array}{l} \text{trimestrielle} \\ \text{mensuelle} \end{array} \right. \end{array}$$

Programme $X - 11$ additif trimestriel

A) Désaisonnalisation préliminaire

1. Première estimation de la tendance : moyenne mobile annulant la saisonnalité d'ordre 4,
$$\hat{Z} = M_0 X$$
où $M_0 = \left\{ [5] \, ; \frac{1}{8} [1, 2, 2] \right\} = \frac{1}{8} \left(B^2 + 2B + 2 + 2F + F^2 \right).$
2. Première estimation de la série diminuée de sa tendance :
$$\widehat{S + u} = X - \hat{Z} = (1 - M_0) \, X \, .$$
3. Première estimation de la saisonnalité :
moyenne mobile sur cinq ans des valeurs associées à une même saison suivie d'une nouvelle extraction de la tendance (pour que la somme des coefficients soit approximativement 0) :
$$\begin{aligned} \hat{S} &= (1 - M_0) \, M_1 \left(Y - \hat{Z} \right) = (1 - M_0) \, M_1 \, (1 - M_0) \, X \\ &= M_1 \, (1 - M_0)^2 \, X \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{[17]\,;\frac{1}{9}\,[1,0,0,0,2,0,0,0,3]\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left(B^8+2B^4+3+2F^4+F^3\right)\ . \end{aligned}$$

4. Première estimation de la série corrigée des variations saisonnières :

$$\hat{X}_{DS} = X - \hat{S} = \left[1 - M_1\left(1-M_0\right)^2\right] X\ .$$

B) Désaisonnalisation finale

5. Seconde estimation de la tendance :
   application d'une moyenne de Henderson à cinq termes à $\hat{X}_{DS}$,

$$\hat{\hat{Z}} = M_2 \hat{X}_{DS} = M_2\left[1 - M_1\left(1-M_0\right)^2\right] X$$

   où

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{[5]\,;\frac{1}{286}\,[-21,84,160]\right\} \\ &= \frac{1}{286}\left(-21B^2+84B+160+84F-21F^2\right)\ . \end{aligned}$$

6. Seconde estimation de la série diminuée de sa tendance :

$$\widehat{\widehat{S+u}} = X - \hat{\hat{Z}} = \left\{1 - M_2\left[1 - M_1\left(1-M_0\right)^2\right]\right\} X\ .$$

7. Seconde estimation de la saisonnalité :
   moyenne mobile sur sept ans des valeurs associées à une même saison suivie d'une nouvelle extraction de tendance :

$$\begin{aligned} \hat{\hat{S}} &= \left(1-M_0\right) M_3 \left(X - \hat{\hat{Z}}\right) = \left(1-M_0\right) M_3 \left\{1 - M_2\left[1 - M_1\left(1-M_0\right)^2\right]\right\} X = MX \\ M_3 &= \left\{[25]\,;\frac{1}{15}\,[1,0,0,0,2,0,0,0,3,0,0,0,3]\right\} \\ &= \frac{1}{15}\left(B^{12}+2B^8+3B^4+3+3F^4+2F^8+F^{12}\right)\ . \end{aligned}$$

Table 1. Coefficients du filtre X-11.

i	θ_i	i	θ_i	i	θ_i	i	θ_i	i	θ_i	i	θ_i	i	θ_i
0	0.856	4	-0.140	8	-0.097	12	-0.053	16	-0.010	20	-0.030	24	0.000
1	0.051	5	0.055	9	0.038	13	0.021	17	0.000	21	0.000	25	0.000
2	0.041	6	0.034	10	0.025	14	0.016	18	0.008	22	0.002	26	0.000
3	0.050	7	0.029	11	0.012	15	-0.005	19	-0.002	23	0.000	27	0.000

8. Seconde estimation de la série corrigée :

$$\widehat{\widehat{S}}_{DS} = X - \widehat{\widehat{S}} = (1 - M)\, X \ .$$

Ordre $(M) = 57$ (14 ans et un trimestre)

Pour les valeurs des coefficients, voir Gouriéroux et Monfort (1983, p. 105). La fonction de gain est donnée par Gouriéroux et Monfort (1983, p. 106).

18. Traitement des observations aux extrémités

Un inconvénient d'une moyenne mobile d'ordre $2m + 1$ vient du fait qu'on n'obtient pas de valeurs pour les m premières ou dernières observations. C'est un problème particulièrement embêtant pour les valeurs les plus récentes. Il y a deux approches au problème.

1. Utiliser des moyennes mobiles non centrées pour les données récentes.
2. Remplacer chaque observation manquante par une prévision.

18.1. Moyennes mobiles non centrées

Soit T la dernière observation disponible. On emploie des moyennes mobiles de la forme :

$$\begin{aligned} X^*_{T,0} &= M_0 X_T = \sum_{j=-m}^{0} \theta_{j,0} X_{T+j} \ , \\ X^*_{T-1,1} &= M_1 X_T = \sum_{j=-m}^{1} \theta_{j,1} X_{T-1+j} \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$X^*_{T-m+1,m-1} \;=\; M_{m-1}X_T = \sum_{j=-m}^{m-1} \theta_{j,m-1}X_{T-m+1+j}\ .$$

Il faut trouver un ensemble de poids différents pour chacune des m observations finales. On doit rajuster la tendance chaque fois qu'une nouvelle observation devient disponible.

18.2. Remplacement des observation manquantes par des prévisions

Soit $\tilde{X}_t$ une prévision de $X_t\ (t > T)$. Alors, on prend

$$X^*_T = \sum_{j=-m}^{T-t} \theta_j X_{t+j} + \sum_{j=1}^{t+m-T} \theta_j \tilde{X}_{T+j}\ , \quad t = T-m+1, \ldots , T$$

e.g.,

$$X^*_T = \sum_{j=-m}^{0} \theta_j X_{t+j} + \sum_{j=1}^{m} \theta_j \tilde{X}_{t+j}\ .$$

Si $\tilde{X}_{T+j}$ est linéaire de la forme

$$\tilde{X}_{T+j} = \sum_{i=-m}^{0} b_{ij}X_{T+i}\ ,$$

alors X^*_t est une moyenne mobile non centrée basée sur $X_{t-m}, \ldots , X_T$.

La méthode des régressions mobiles fournit une façon simple de prédire les valeurs manquantes aux extrémités. Si on estime la régression

$$\sum_{j=-m}^{m} [X_{t+j} - (a_0 + a_1 j + \cdots + a_p j^p)]^2$$

à partir des $2m+1$ dernières observations, on peut obtenir les estimateurs $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots , \hat{a}_p$. On peut alors prédire

$$X_{T+j} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 j + \cdots + \hat{a}_p j^p, \quad j = 1, 2, \ldots , m\ .$$

On voit aisément que X^*_t est une moyenne mobile non centrée $(t = T-m+1, \ldots , T)$ basée sur $X_t, t = T-(2m+1)+1, \ldots , T$.

18.1 Exemple Prenons $m = 3$ et $p = 3$, de sorte que $2m+1 = 7$ [Kendall et al. (1983,

p. 459)].

$$\begin{aligned}
M &= \left\{[7]\,;\frac{1}{21}\,[-2,3,6,7]\right\} \\
&= \frac{1}{21}\left[-2B^3+3B^2+6B+7+6F+3F^2=2F^3\right] \ , \\
\hat{X}_t &= \hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 t+\hat{\alpha}_2 t^2+\hat{\alpha}_3 t^3 \ , \\
\hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{21}\left\{\sum X_t-\sum t^2 X_t\right\} \text{ où } \sum \equiv \sum_{t=T-2m}^{T} \ , \\
\hat{a}_1 &= \frac{1}{1512}\left\{397\sum tX_t-49\sum t^3 X_t\right\} \ , \\
\hat{a}_2 &= \frac{1}{84}\left\{-4\sum X_t+\sum t^2 X_t\right\} \ , \\
\hat{a}_3 &= \frac{1}{216}\left\{-7\sum tX_t+\sum t^3 X_t\right\} \ .
\end{aligned}$$

19. Changements de régimes

Les moyennes mobiles se comportent mieux qu'une régression sur toute la série pour estimer la tendance.

20. Notes bibliographiques

Voir Kendall et al. (1983), Gouriéroux et Monfort (1983, Chap. II), Gouriéroux et Monfort (1990, Chap. II) et Diebold (1998, Chapter 4).

Références

Bongard, J. (1962), *Quelques remarques sur les moyennes mobiles*, OCDE, Paris.

Diebold, F. (1998), *Elements of Forecasting*, South-Western College Publishing, Cincinnati (Ohio).

Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1983), *Cours de séries temporelles*, Economica, Paris.

Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1990), *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Economica, Paris.

Kendall, M., Stuart, A. et Ord, J. K. (1983), *The Advanced Theory of Statistics. Volume 3 : Design and Analysis and Time Series*, fourth edn, Macmillan, New York.

Makridakis, S., Wheelwright, S. C. et McGee, V. E. (1983), *Forecasting : Methods and Applications*, second edn, John Wiley & Sons, New York.