Prévision de processus stationnaires et ARIMA *

Jean-Marie Dufour †
Université de Montréal

Première version: Mars 1985
Révisions: Mars 2005
Cette version: 29 mars 2005
Compilé: 29 mars 2005, 2:14pm

* Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS), du Fonds de recherche sur la société et la culture (Québec), et du Fonds de recherche sur la nature et les technologies (Québec).

† Titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie (Université de Montréal). Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

1. Formules de Wiener-Kolmogorov

D'après le théorème de décomposition de Wold, un processus stationnaire au sens large (de moyenne zéro) peut s'écrire sous la forme :

$$X_t = Y_t + D_t$$

où

$$\begin{aligned}
Y_t &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{t-j}\,, \quad d_0 = 1,\ \{u_t\} \sim BB\left(0,\, \sigma^2\right)\,, \\
&D_t \text{ est déterministe}\,, \\
u_t &= X_t - P_L\left(X_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right)\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_L\left(u_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right) = 0$$

ou, plus généralement,

$$P_L\left(u_t \mid X_{t-\ell},\, X_{t-\ell-1},\, \ldots\right) = 0 \quad , \quad \forall \ell \geq 1.$$

Si X_t est un processus strictement non-déterministe,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{t-j}$$

on a :

$$\begin{aligned}
P_L\left(X_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right) &= P_L\left(u_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right) \\
&\quad + P_L\left[\sum_{j=1}^{\infty} d_j u_{t-j} \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} d_j u_{t-j}\,.
\end{aligned}$$

De plus, si on suppose que les $\{u_t\}$ sont indépendants,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(u_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right) &= \mathsf{E}\left(u_t \mid u_{t-1},\, u_{t-2},\, \ldots\right) = 0\,, \\
\mathsf{E}\left(X_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} d_j u_{t-j}
\end{aligned}$$

$$= \quad P_L\left(X_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right)\ .$$

On a aussi la meilleure prévision au sens de l'EQM.

Soit $\{X_t\}$ un processus SSL non-déterministe

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{t-j} = d\left(B\right) u_t, \tag{1.1}$$

où

$$d_0 = 1 \quad , \quad d\left(B\right) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j B^j\ . \tag{1.2}$$

Dénotons :

$$P_{t-j} X_t = P\left(X_t \mid X_{t-j},\, X_{t-j-1},\, \ldots\right)\ .$$

Alors :

$$\begin{aligned}
P_{t-j} X_t &= X_t \ \text{ pour } \ j \leq 0\ , \\
u_t &= X_t - P\left(X_t \mid X_{t-1},\, X_{t-2},\, \ldots\right) \\
&= X_t - P_{t-1} X_t \\
P_{t-1} X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j P_{t-1} u_{t-j} = \sum_{j=1}^{\infty} d_j u_{t-j} \\
&= \left(\frac{d\left(B\right)}{B}\right)_+ u_{t-1}
\end{aligned}$$

où on définit

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j B^j\right)_+ = \sum_{j=0}^{\infty} h_j B^j\ ,$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d\left(B\right)}{B}\right]_+ &= \left(d_0 B^{-1} + d_1 B^0 + d_2 B^1 + \cdots\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} d_j B^{j-1}\right)_+ \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} d_j B^{j-1}\ .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

De la même manière, on obtient au délai ℓ,

$$\begin{aligned} P_{t-\ell}X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j P_{t-\ell} u_{t-j} = \sum_{j=\ell}^{\infty} d_j u_{t-j} \\ &= \left(\frac{d(B)}{B^{\ell}}\right)_+ u_{t-\ell} \end{aligned}$$

ou, de façon équivalente,

$$P_t X_{t+\ell} = \left(\frac{d(B)}{B^{\ell}}\right)_+ u_t = \sum_{j=\ell}^{\infty} d_j u_{t+\ell-j} \ . \tag{1.4}$$

On appelle (1.4) la Formule de Wiener-Kolmogorov pour la prévision linéaire ℓ périodes à l'avance. On voit que $P_t X_{t+\ell}$ s'obtient en laissant tomber les l termes les plus récents dans la décomposition de Wold :

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{t-j} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} d_j u_{t+\ell-j} + \sum_{j=\ell}^{\infty} d_j u_{t+\ell-j} \\ &= e_t(l) + P_t X_{t+\ell} \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si X_t est inversible,

$$u_t = \frac{1}{d(B)} X_t$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{t-\ell}X_t &= \left(\frac{d(B)}{B^{\ell}}\right)_+ \frac{1}{d(B)} X_{t-\ell} \ , \\ P_t X_{t+\ell} &= \left(\frac{d(B)}{B^{\ell}}\right)_+ \frac{1}{d(B)} X_t \ , \ \ell \geq 1 \, . \end{aligned}$$

1.1 Exemple Pour un processus AR(1) ,

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + u_t \, , \quad |\varphi_1| < 1 \tag{1.6}$$

on a la représentation

$$X_t = \frac{1}{1 - \varphi_1 B} u_t \, , \tag{1.7}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{t-1}X_t &= \varphi_1 P_{t-1}X_{t-1} + P_{t-1}u_t & (1.8)\\ &= \varphi_1 X_{t-1}\,, & (1.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{t-\ell}X_t &= \varphi_1 P_{t-\ell}X_{t-1}\\ &= \varphi_1 P_{t-\ell}\left(\varphi_1 X_{t-2} + u_{t-1}\right)\\ &= \varphi_1^2 P_{t-\ell}X_{t-2}\\ &= \varphi_1^\ell X_{t-\ell}\,.\end{aligned}$$

Si on utilise la formule de Wiener-Kolmogorov, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{t-\ell}X_t &= \left[B^{-\ell}\frac{1}{1-\varphi_1 B}\right]_+ u_{t-\ell}\\ &= \left[B^{-\ell}\left(1+\varphi_1 B+\varphi_1^2B^2+\cdots\right)\right]_+ \left(1-\varphi_1 B\right) X_{t-\ell}\\ &= \varphi_1^\ell\left(1+\varphi_1 B+\varphi_1^2B^2+\cdots\right)\left(1-\varphi_1 B\right) X_{t-\ell}\\ &= \frac{\varphi_1^\ell}{1-\varphi_1 B}\left(1-\varphi_1 B\right) X_{t-\ell}\\ &= \varphi_1^\ell X_{t-\ell}\,.\end{aligned}$$

1.2 Exemple Pour le processus MA(1) ,

$$X_t = \left(1-\theta_1 B\right) u_t\,, \quad |\theta_1| < 1, \tag{1.10}$$

on a

$$u_t = \frac{1}{1-\theta_1 B} X_t\,, \tag{1.11}$$

d'où les prévisions : pour $\ell = 1$,

$$\begin{aligned} P_{t-1}X_t &= \left[B^{-1}\left(1-\theta_1 B\right)\right]_+ \frac{1}{1-\theta_1 B} X_{t-1}\\ &= \frac{-\theta_1}{1-\theta_1 B} X_{t-1}\\ &= -\theta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i X_{t-1-i} & (1.12)\\ &= -\sum_{i=1}^{\infty} \theta_1^i X_{t-i}\,; & (1.13)\end{aligned}$$

pour $\ell \geq 2$

$$P_{t-\ell}X_t = \left[B^{-\ell}\left(1-\theta_1 B\right)\right]_+ \frac{1}{1-\theta_1 B} X_{t-\ell} = 0\ .$$

1.3 Exemple Pour un processus ARMA$(1,1)$ de la forme

$$\begin{aligned} \left(1-\varphi_1 B\right) X_t &= \left(1-\theta_1 B\right) u_t\ , && (1.14)\\ \mid\ \ \varphi_1 \mid &< 1\ ,\ \ \mid \theta_1 \mid < 1\ , && (1.15) \end{aligned}$$

la représentation de Wold s'écrit :

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\left(1-\theta_1 B\right)}{\left(1-\varphi_1 B\right)} u_t && (1.16)\\ &= d\left(B\right) u_t\ . && (1.17) \end{aligned}$$

De là, on obtient les prévisions : au délai 1,

$$P_{t-1}X_t = \left[\frac{d\left(B\right)}{B}\right]_+ u_{t-1} = \left[\frac{d\left(B\right)}{B}\right]_+ \frac{1}{d\left(B\right)} X_{t-1} \tag{1.18}$$

où

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\left(B\right)}{B}\right]_+ &= \left[B^{-1}\frac{\left(1-\theta_1 B\right)}{\left(1-\varphi_1 B\right)}\right]_+ \\ &= \left[\frac{B^{-1}}{1-\varphi_1 B} - \frac{\theta_1}{1-\varphi_1 B}\right]_+ \\ &= \left[B^{-1}\left[1+\varphi_1 B\left(1+\varphi_1 B+\varphi_1^2 B^2+\cdots\right)\right] - \frac{\theta_1}{1-\varphi_1 B}\right]_+ \\ &= \left[B^{-1} + \frac{\varphi_1}{1-\varphi_1 B} - \frac{\theta_1}{1-\varphi_1 B}\right]_+ = \frac{\left(\varphi_1-\theta_1\right)}{1-\varphi_1 B}, && (1.19) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} P_{t-1}X_t &= \frac{\left(\varphi_1-\theta_1\right)}{1-\varphi_1 B}\left(\frac{1-\varphi_1 B}{1-\theta_1 B}\right) X_{t-1} && (1.20)\\ &= \frac{\left(\varphi_1-\theta_1\right)}{1-\theta_1 B} X_{t-1}; && (1.21) \end{aligned}$$

au délai ℓ,

$$P_{t-\ell}X_t = \left[\frac{d\left(B\right)}{B^{\ell}}\right]_+ u_{t-\ell} = \left[\frac{d\left(B\right)}{B^{\ell}}\right]_+ \frac{1}{d\left(B\right)} X_{t-\ell} \tag{1.22}$$

où

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d(B)}{B^{\ell}}\right]_+ &= \left[B^{-\ell}\frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\varphi_1 B)}\right]_+ \\
&= \left[\frac{B^{-\ell}}{1-\varphi_1 B} - \frac{\theta_1 B^{-(\ell-1)}}{(1-\varphi_1 B)}\right] && (1.23) \\
&= \left[\frac{\varphi_1^{\ell}}{1-\varphi_1 B} - \frac{\theta_1 \varphi_1^{\ell-1}}{1-\varphi_1 B}\right] = \frac{\varphi_1^{\ell-1}(\varphi_1-\theta_1)}{1-\varphi_1 B}, && (1.24)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
P_{t-\ell}X_t &= \frac{(\varphi_1-\theta_1)\varphi_1^{\ell-1}}{1-\varphi_1 B}\left(\frac{1-\varphi_1 B}{1-\theta_1 B}\right)X_{t-\ell} && (1.25) \\
&= \frac{\varphi_1^{\ell-1}(\varphi_1-\theta_1)}{1-\theta_1 B}X_{t-\ell} && (1.26)
\end{aligned}$$

ou encore

$$P_t X_{t+\ell} = \frac{\varphi_1^{\ell-1}(\varphi_1-\theta_1)}{1-\theta_1 B}X_t \,.$$

2. Règle de chaîne pour la prévision

Soit

$$P_t X_{t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j X_{t-j} \,.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
P_{t+\ell}X_{t+\ell+1} &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j X_{t+\ell-j} \\
&= h_0 X_{t+\ell} + h_1 X_{t+\ell-1} + \cdots + h_\ell X_t + h_{\ell+1}X_{t-1} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_t\left[P_{t+\ell}X_{t+\ell+1}\right] &= P_t X_{t+\ell+1} \\
&= h_0 P_t X_{t+\ell} + h_1 P_t X_{t+\ell-1} + \cdots + h_{\ell-1}P_t X_{t+1} \\
&\quad + h_\ell X_t + h_{\ell+1}X_{t-1} + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} h_i P_t X_{t+\ell-i} + \sum_{i=\ell}^{\infty} h_i X_{t+\ell-i}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell-1} h_i P_t X_{t+\ell-i} + \sum_{i=0}^{\infty} h_{i+\ell} X_{t-i} \,.$$

Cette formule permet de calculer les prévisions plusieurs étapes à l'avance à partir de prévisions 1 période à l'avance.

3. Propriétés des erreurs de prévision

Soit

$$P_t X_{t+\ell} = P\left(X_{t+\ell} \mid X_t,\, X_{t-1},\, \ldots\right) \,.$$

Si

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{t-j} \,, \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & (3.2) \\ u_t &= X_t - P_{t-1} X_t \,, & (3.3) \\ V\left(u_t\right) &= \sigma^2, & (3.4) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} X_{t+\ell} &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{t+\ell-j} \,, \\ P_t X_{t+\ell} &= \sum_{j=\ell}^{\infty} d_j u_{t+\ell-j} \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_t\left(\ell\right) &\equiv X_{t+\ell} - P_t X_{t+\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} d_j u_{t+\ell-j} \\ &= u_{t+\ell} + d_1 u_{t+\ell-1} + \cdots + d_{\ell-1} u_{t+1} \end{aligned}$$

suit un processus $MA\left(\ell-1\right)$, d'où

$$V\left[e_t\left(\ell\right)\right] = \sigma^2\left[1 + d_1^2 + \cdots + d_{\ell-1}^2\right]$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} d_i^2 ,$$

où $d_0 = 1$. Par conséquent,

$$e_t(1) = u_{t+1} . \quad (3.5)$$

Les erreurs de prévision (optimales) une période à l'avance sont non-corrélées entre elles. D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[e_t(\ell)\, e_{t+k}(\ell)] &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell-k-1} d_i d_{i+k} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=k}^{\ell-1} d_i d_{i-k} , \quad 0 \le k \le \ell - 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mathsf{E}[e_t(\ell)\, e_{t+k}(\ell)] = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=k}^{\ell-1} d_i d_{i-k} , & \text{si } 0 \le k \le \ell - 1 , \\ 0 , & \text{si } k \ge \ell , \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\mathsf{Corr}[e_t(\ell) , e_{t+k}(\ell)] = \begin{cases} \sum_{i=k}^{\ell-1} d_i d_{i-k} / \sum_{j=0}^{\ell-1} d_j^2 , & \text{si } 0 \le k \le \ell - 1 , \\ 0 , & \text{si } k \ge \ell , \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}[e_t(\ell) , e_t(\ell + j)] &= \mathsf{E}[e_t(\ell)\, e_t(\ell + j)] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} d_i d_{i+j} \neq 0 , \quad \text{pour } j \ge 0 . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les covariances entre prévisions faites au même moment à différents délais sont données par :

$$\begin{aligned} C[e_t(\ell) , e_t(\ell + j)] &= \mathsf{E}[e_t(\ell)\, e_t(\ell + j)] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} d_i d_{i+j} . \end{aligned}$$

4. Prévisions à l'aide de modèles ARIMA

Supposons que X_t suit un processus ARIMA de la forme :

$$\varphi_p(B)\,(1 - B)^d X_t = \theta_q(B)\, u_t + \bar{\mu} , \quad (4.1)$$

$$u_t \sim BB\left(0 , \sigma^2\right) , \quad (4.2)$$

Si on dénote

$$\varphi(B) = \varphi_p(B)(1-B)^d \ , \tag{4.3}$$

on peut écrire

$$\varphi(B) X_t = \theta_q(B) u_t + \bar{\mu} \, , \tag{4.4}$$

ou encore

$$\left[1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_{p+d} B^{p+d}\right] X_t = \left[1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right] u_t + \bar{\mu} \, , \tag{4.5}$$

d'où la *représentation en équation à différences finies* de X_t :

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_{p+d} X_{t-p-d} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \cdots - \theta_q u_{t-q} + \bar{\mu} \tag{4.6}$$

ou

$$X_t = \sum_{i=1}^{p+d} \varphi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j u_{t-j} + \bar{\mu} + u_t \, . \tag{4.7}$$

4.1 Exemple Dans le cas d'un processus ARIMA$(1, 1, 0)$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-\phi_1 B)(1-B) X_t &= u_t \, , \\
\left[1 - \varphi_1 B + \varphi_2 B^2\right] X_t &= \left[1 - (\phi_1 + 1) B + \phi_1 B^2\right] X_t = u_t \, , \\
\varphi_1 &= (\phi_1 + 1) \ , \ \varphi_2 = -\phi_1 \, .
\end{aligned}$$

Appliquant l'opérateur de projection P_t aux deux côtés de l'équation (4.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P_t X_{t+1} &= \sum_{i=1}^{p+d} \varphi_i P_t X_{t+1-i} - \sum_{j=0}^{q} \theta_j P_t u_{t+1-j} + \bar{\mu} \\
&= \sum_{i=1}^{p+d} \varphi_i X_{t+1-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j u_{t+1-j} + \bar{\mu} \ , \\
P_t X_{t+2} &= \varphi_1 P_t X_{t+1} + \sum_{i=2}^{p+d} \varphi_i X_{t+2-i} - \sum_{j=2}^{q} \theta_j u_{t+2-j} + \bar{\mu} \, ,
\end{aligned}$$

et, de façon générale,

$$P_t X_{t+\ell} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \varphi_i P_t X_{t+\ell-i} + \sum_{i=\ell}^{p+d} \varphi_i X_{t+\ell-i} - \sum_{j=\ell}^{q} \theta_j u_{t+\ell-j} + \bar{\mu} \ .$$

En remarquant que

$$P_t u_{t+\ell} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \ell \geq 1\,, \\ u_{t+\ell}\,, & \text{si } \ell \leq 0\,, \end{cases}$$

on voit alors que

$$P_t X_{t+\ell} = \sum_{i=1}^{p+d} \varphi_i P_t X_{t+\ell-i} + P_t u_{t+\ell} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j P_t u_{t+\ell-j} + \bar{\mu} \tag{4.1}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(B)\, P_t X_{t+\ell} &= \theta(B)\, P_t u_{t+\ell} + \bar{\mu}\,, \\ \varphi(B)\, X_{t+\ell} &= \theta(B)\, u_{t+\ell} + \bar{\mu}\,, \\ \varphi(B)\,(X_{t+\ell} - P_t X_{t+\ell}) &= \theta(B)\,(u_{t+\ell} - P_t u_{t+\ell})\ . \end{aligned}$$

Soit

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j\,,$$
$$\varphi(B)\,\psi(B) = \theta(B)\ ,$$
$$e_t(\ell) = X_{t+\ell} - P_t X_{t+\ell}\,, \quad \ell \geq 1\,,$$
$$\varphi(B)\, e_t(\ell) = \varphi(B)\,\psi(B)\,(u_{t+\ell} - P_t u_{t+\ell})\ .$$

Si on note que

$$\begin{aligned} e_t(\ell) &= 0\,,\ \ell \leq 0 \\ u_{t+\ell} - P_t u_{t+\ell} &= \begin{cases} 0\,, & \ell \leq 0 \\ u_{t+\ell}\,, & \ell \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

on peut simplifier $\varphi(B)$ des deux côtés et on obtient

$$\begin{aligned} e_t(\ell) &= \psi(B)\,(u_{t+\ell} - P_t u_{t+\ell}) \\ &= u_{t+\ell} + \psi_1 u_{t+\ell-1} + \cdots + \psi_{\ell-1} u_{t+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \psi_i u_{t+\ell-i}\,, \end{aligned}$$

où $\psi_0 = 1$. Il s'ensuit que

$$\mathsf{E}\,[e_t(\ell)] = 0$$

$$\mathsf{V}\left[e_t(\ell)\right] \;=\; V(\ell)=\sigma^2\left[1+\sum_{j=1}^{\ell-1}\psi_j^2\right] \; .$$

Les erreurs de prévision 1 période à l'avance $e_t(1)$ sont non-corrélées entre elles. De façon plus générale,

$$\mathsf{E}\left[e_t(\ell)\, e_{t-j}(\ell)\right]=\begin{cases}\sigma^2\sum_{i=j}^{\ell-1}\psi_i\psi_{i-j}\,, & \text{si } 0\le j\le \ell-1\,,\\ 0\,, & \text{si } \mid j\mid\ge \ell\,,\end{cases} \tag{4.8}$$

$$\mathsf{E}\left[e_t(\ell)\, e_t(\ell+j)\right]=\left(\sum_{i=0}^{\ell-1}\psi_i\psi_{i+j}\right)\sigma^2 \; .$$

Si on suppose que $u_t \overset{ind}{\sim} N\left[0,\, \sigma_a^2\right]$

$$e_t(\ell)\sim N\left[0,\, \left\{1+\sum_{j=1}^{\ell-1}\psi_j^2\right\}\sigma^2\right]\; ,$$

on peut calculer des intervalles de confiance pour les prédictions :

$$\mathsf{P}\left[P_tX_{t+\ell}-c_{\alpha/2}\varDelta_\ell\le X_{t+\ell}\le P_tX_{t+\ell}+c_{\alpha/2}\varDelta_\ell\right]=1-\alpha$$

où

$$\varDelta_\ell^2=\left\{1+\sum_{j=1}^{\ell-1}\psi_j^2\right\}\sigma^2\,, \tag{4.9}$$

$$\mathsf{P}\left[N(0,\,1)\ge c_\alpha\right]=\alpha\; .$$

En calculant les prévisions à différents horizons ℓ, on obtient une *fonction de prévision* :

$$\begin{aligned} P_tX_{t+\ell} &\equiv \hat{X}_t(\ell)\;,\;\; \ell=1,\,2,\,3,\,\ldots\,,\\ \varphi(B)\,X_t &= \theta(B)\,u_t+\bar{\mu}\,,\\ \varphi(B)\,\hat{X}_t(\ell) &= \theta(B)\,P_tu_{t+\ell}+\bar{\mu}\,,\\ \varphi_p(B)\,(1-B)^d\,\hat{X}_t(\ell) &= \theta(B)\,P_tu_{t+\ell}+\bar{\mu}\;. \end{aligned}$$

Si $d=0$ et ℓ est grand, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_p(B)\,\hat{X}_t(\ell) &\simeq \bar{\mu}\,,\\ \hat{X}_t(\ell) &\simeq \mu\equiv\frac{\bar{\mu}}{\varphi_p(B)}=\frac{\bar{\mu}}{1-\varphi_1-\cdots-\varphi_p}\;. \end{aligned}$$

Si $d = 1$ et ℓ est grand,

$$\varphi_p(B)(1-B)\hat{X}_t(\ell) \simeq \bar{\mu}$$
$$(1-B)\hat{X}_t(\ell) \simeq \mu \equiv \frac{\bar{\mu}}{\varphi_p(B)}$$
$$\hat{X}_t(\ell) \simeq \mu_0 + \mu\ell \quad \text{Progression arithmétique.}$$

Si $d = 2$ et ℓ est grand,

$$\hat{X}_t(\ell) \simeq \mu_0 + \mu_1\ell + \mu_2\ell^2 .$$

5. Notes bibliographiques

Le lecteur trouvera des discussions générales de la prévision à partir de modèles ARIMA dans Box et Jenkins (1976, Sections 5.1-5.5, 5.7), Brockwell et Davis (1991, Sections 5.1-5.5) et Hamilton (1994, Chap. 4). Sur la prévision pour des processus stationnaires ainsi que la formule de Wiener-Kolmogorov, voir aussi Wiener (1949), Whittle (1983), Whiteman (1983) et Sargent (1987).

Références

Box, G. E. P. et Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, second edn, Holden-Day, San Francisco.

Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (1991), *Time Series : Theory and Methods*, second edn, Springer-Verlag, New York.

Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Sargent, T. J. (1987), *Macroeconomic Theory*, second edn, Academic Press, New York .

Whiteman, C. H. (1983), *Linear Rational Expectations Models*, University of Minnesota Press, Minneapolis, MN.

Whittle, P. (1983), *Prediction and Regulation by Linear Least Square Methods*, second edn, University of Minnesota Press, New York.

Wiener, N. (1949), *Time Series*, The MIT Press, Cambridge, MA.